実力をつけるために…

どうしたら自転車が上手に乗れるようになるのだろうか？
補助輪を付けて練習した人もいたでしょう．何度も転んで怪我をして，それでも諦めずに乗り続けることで，上手く乗れるようになりました．自転車に3回しか乗ったことがない人と300回乗ったことがある人ではどちらが上手に乗れるでしょうか．その答は明白です．自転車を上手に乗れるようになる為に，競輪選手のビデオを徹底研究する人がいたとしたら，あなたはどうアドバイスしますか？
そんなものをいくら見て研究しても，実際に自転車に乗ってみないと上手にはならないとアドバイスするでしょう．

受験勉強というのは，数学に限らず，自転車を上手に乗ることに似ています．一流の学者の論文を読んだりしてもいけないわけで，実際に自分のまわりにある問題と実際に格闘してもがいて苦しんではじめて問題が上手に解けるようになるのですね．
ただ，受験勉強の場合は，自転車における補助輪に相当する，参考書や予備校，そして「スタディサプリ」など，これから実力をつけようと考えている受験生にとっての踏み台になるものが沢山あります．
それらを上手に利用して，最後は自分の力で時間の許す限り多くの問題を経験して，制限時間内でちゃんとした解答を書けるようになるまで徹底的に練習することによって，合格がより確実なものになるわけです．

以上のことを意識しながら授業を受けて，自分の及ばない所を少しでもなおしていけば，必ず数学はできるようになるはずです．

最後まで諦めずに頑張りましょう !!

堺　義明

高1・2　トップレベル数学ⅠAⅡB （前期）

目　次

第 1 講　２次関数の最大最小
第 2 講　２次方程式の解の配置
第 3 講　対数の計算
第 4 講　三角比といえば…
第 5 講　三角関数の公式の導き方
第 6 講　三角関数の合成（基本編）
第 7 講　周期関数について…
第 8 講　定義に従って微分
第 9 講　３次のグラフと直線など
第 10 講　３次の接線と交点について
第 11 講　３次のグラフについて
第 12 講　３次方程式の実数解について
第 13 講　面積以外の積分計算
第 14 講　積分の公式について
第 15 講　２次の面積の計算
第 16 講　群数列
第 17 講　基本漸化式 — Part Ⅰ —
第 18 講　基本漸化式 — Part Ⅱ —
第 19 講　漸化式は数行で解け！
第 20 講　数列の和と一般項
第 21 講　数学的帰納法
第 22 講　分点公式と平面ベクトル
第 23 講　内積と平面ベクトル
第 24 講　平面ベクトルで垂直といえば…

第1講　2次関数の最大最小

1　a を定数とするとき，関数 $f(x)=2x^2-4x-a^2+5a$ の $a \leqq x \leqq a+2$ における最小値を $m(a)$，最大値を $M(a)$ とする．以下の各問いに答えよ．

(1)　すべての実数 x に対して $f(x)>0$ となる a の値の範囲を求めよ．

(2)　$x>a$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)>0$ となるよう a の値の範囲を定めよ．

(3)　$m(a)$ を求め，関数 $b=m(a)$ のグラフを図示せよ．

(4)　$M(a)$ を求め，関数 $b=M(a)$ のグラフを図示せよ．

(5)　$m(a)$ の最大値を求めよ．ただし，$-5 \leqq a \leqq 2$ とする．

＜ Note ＞

第１講　２次関数の最大最小

1　関数 $f(x)=x^2+2ax+8$ の $-1\leqq x\leqq 2$ における最小値を $m(a)$ とおく.

(1)　$m(a)$ を求め，関数 $b=m(a)$ のグラフを図示せよ.

(2)　$m(a)=2$ となる a の値を求めよ.

【選択肢】

(1)　㋐　$m(a)=\begin{cases} -2a+9 & (a\geqq 2) \\ -a^2+8 & (-1<a<2) \\ 4a+12 & (a\leqq -1) \end{cases}$　　㋑　$m(a)=\begin{cases} 4a+12 & (a\geqq 1) \\ -a^2+8 & (-2<a<1) \\ -2a+9 & (a\leqq -2) \end{cases}$

㋒　$m(a)=\begin{cases} -2a+9 & (a\geqq 1) \\ -a^2+8 & (-2<a<1) \\ 4a+12 & (a\leqq -2) \end{cases}$

(2)　㋐　$a=-\dfrac{7}{2},\ \dfrac{5}{2}$　　㋑　$a=-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}$　　㋒　$a=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}$

＜ Note ＞

第２講　２次方程式の解の配置

2　x の２次方程式　$x^2-(a+2)x-a+1=0$　……①　に関して，次の各問いに答えよ．

(1)　①は $x=-1$ を解にもたないことを示せ．

(2)　①が正の解と負の解を１つずつもつような a の値の範囲を求めよ．

(3)　①が異なる２つの正の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(4)　(3)のとき，小さい方の解を α とする．α のとり得る値の範囲を求めよ．

< Note >

第２講　２次方程式の解の配置

2　x の方程式 $x^2-ax+3-a=0$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　正の解と負の解を１つずつもつような実数 a の値の範囲を求めよ．

(2)　２解がともに $\dfrac{1}{2}$ 以上となるような実数 a の値の範囲を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$a \geqq 3$　　㋑　$a > 3$　　㋒　$a < 3$

(2)　㋐　$2 < a < \dfrac{13}{6}$　　㋑　$2 < a \leqq \dfrac{13}{6}$　　㋒　$2 \leqq a \leqq \dfrac{13}{6}$

＜ Note ＞

第３講　対数の計算

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ を示せ．ただし，a は１でない正の定数，x，y はともに正の実数とする．

(2)　$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき，$\log_{10} 48$ と $\log_{10} 50$ の値をそれぞれ求めよ．また，$\log_{10} 7$ の小数第１位と第２位の数を求めよ．

(3)　a を１でない正の実数とする．不等式

$$\log_{\sqrt{a}}(3-x) - \frac{1}{\log_2 a} > \log_a(x+2) + 1$$

を満たす整数 x がただ１つ存在するための a の満たす条件を求めよ．

(4)　$2\log_y x - \log_x y > -1$ を満たす点 $(x,\ y)$ が存在する領域を図示せよ．

＜ Note ＞

第３講　対数の計算

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$\log_2 2352$ の値を四捨五入して小数第２位まで求めよ．次に，$6<2^{\sqrt{7}}<7$ であることを示せ．さらに，$\dfrac{7}{5}<\log_2(\log_2 7)<\dfrac{3}{2}$ であることを示せ．

ただし，$\log_2 3=1.5850$，$\log_2 7=2.8074$ とする．

(2)　次の連立方程式が実数解をもつための a の値の範囲を示し，解を求めよ．

$$\begin{cases} 2+\log_x y-\log_x a=2\log_{x^2}(ax+3)+\log_x(x-a+1) \\ (5+3\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^{ax}=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})^{y} \end{cases}$$

【選択肢】

(1)　㋐　11.20　　㋑　11.22　　㋒　11.19

(2)　㋐　a の範囲：$0<a<1$，$1<a<\dfrac{4}{3}$

$$解：x=\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0<a<1) \\ \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a<\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

㋑　a の範囲：$0<a<1$，$1<a\leqq\dfrac{4}{3}$

$$解：x=\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0<a<1) \\ \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a\leqq\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

㋒　a の範囲：$0\leqq a<1$，$1<a\leqq\dfrac{4}{3}$

$$解：x=\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0\leqq a<1) \\ \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a\leqq\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

＜ Note ＞

第４講　三角比といえば…

4　円に内接する四角形 ABCD が AB＝3，BC＝2，CD＝1，DA＝4 を満たしている．また，直線 AB と直線 CD の交点を E，直線 AD と直線 BC の交点を F，線分 AC と線分 BD の交点を P とし，三角形 BCE の外接円と直線 EF の交点で E 以外のものを点 Q とする．次の各問いに答えよ．

(1)　点 Q は三角形 CDF の外接円上にあることを示せ．

(2)　線分 BD，線分 BE，線分 DF，線分 EF の長さをそれぞれ求めよ．

(3)　四角形 ABCD の面積 S を求めよ．

(4)　線分 AP の長さを求めよ．

(5)　$\sin\angle \mathrm{APB}$ の値を求めよ．

＜ Note ＞

第4講　三角比といえば…

4　AB＝15，AC＝8である△ABCの内心をP，∠Cの2等分線と辺ABの交点をD，∠Bの2等分線と辺ACの交点をE，直線DEが辺BCの延長線と交わる点をFとする．4点A，D，P，Eが同一円周上にあるとき，以下の□にあてはまる適切な数をそれぞれ答えよ．

(1)　$\angle A=\dfrac{1}{\square}(\angle B+\angle C)$であるから，$\angle A=\square^\circ$である．

(2)　線分BCの長さは□である．

(3)　線分CFの長さは$\dfrac{\square}{\square}$である．

(4)　線分AEの長さは$\dfrac{\square}{\square}$であり，線分BPの長さは$\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$である．

【選択肢】

(1)　㋐　$\angle A=\dfrac{1}{3}(\angle B+\angle C)$，$\angle A=45^\circ$　㋑　$\angle A=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)$，$\angle A=60^\circ$

㋒　$\angle A=\dfrac{1}{5}(\angle B+\angle C)$，$\angle A=30^\circ$

(2)　㋐　BC＝12　㋑　BC＝14　㋒　BC＝13

(3)　㋐　$CF=\dfrac{104}{7}$　㋑　$CF=\dfrac{99}{7}$　㋒　$CF=\dfrac{114}{7}$

(4)　㋐　$AE=\dfrac{36}{7}$，$BP=\dfrac{5\sqrt{26}}{3}$　㋑　$AE=\dfrac{25}{7}$，$BP=\dfrac{5\sqrt{13}}{3}$

㋒　$AE=\dfrac{30}{7}$，$BP=\dfrac{5\sqrt{39}}{3}$

＜ Note ＞

第５講　三角関数の公式の導き方

5　次の公式を導け.

(1)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(3)　$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

(4)　$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

＜ Note ＞

第５講　三角関数の公式の導き方

5　$\cos\theta = x$ とするとき，次の各式を x の整式として表せ.

(1)　$\cos 4\theta$

(2)　$\cos 5\theta$

(3)　$\cos 6\theta$

(4)　$\cos 9\theta$

【選択肢】

(1)　㋐　$8x^4 - 8x^2 + 1$　㋑　$8x^4 + 8x^2 + 1$　㋒　$8x^4 - 8x^2 - 1$

(2)　㋐　$16x^5 - 20x^3 - 5x$　㋑　$16x^5 - 20x^3 + 5x$　㋒　$16x^5 + 20x^3 + 5x$

(3)　㋐　$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$　㋑　$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 + 1$

㋒　$32x^6 - 48x^4 - 18x^2 - 1$

(4)　㋐　$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 - 9x$

㋑　$256x^9 - 576x^7 - 432x^5 - 120x^3 + 9x$

㋒　$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$

＜ Note ＞

第６講　三角関数の合成（基本編）

6　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$f(\theta)=3\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(2)　$f(\theta)=3\sin\theta+4\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．また，最大値を与える θ を θ_1 とするとき，$\tan 2\theta_1$ の値を求めよ．

(3)　$f(\theta)=\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+3\cos^2\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(4)　$f(\theta)=\sin^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+4\cos^2\theta-\sin\theta-2\cos\theta+1$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

＜ Note ＞

第６講　三角関数の合成（基本編）

6　$0 \leqq x < 2\pi$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x) = 2 + \sin 2x - \sin x - \cos x$ とする．このとき $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(2)　$g(x) = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + 5\cos^2 x$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　最大値 1，最小値 $\frac{3}{4}$　　㋑　最大値 $3+\sqrt{2}$，最小値 $\frac{3}{4}$

㋒　最大値 $3+\sqrt{2}$，最小値 $3-\sqrt{2}$

(2)　㋐　最大値 $3+\sqrt{5}$，最小値 $3-\sqrt{5}$　　㋑　最大値 5，最小値 2

㋒　最大値 $3+\sqrt{3}$，最小値 $3-\sqrt{3}$

＜ Note ＞

第７講　周期関数について…

7　次の各問いに答えよ．

ただし，$f(x)$ の基本周期とは，関数 $f(x)$ において $f(x+p)=f(x)$ が任意の実数 x に対して成り立つような 0 以外の定数 p のうち正の最小の値をいう．

(1)　$f(x)=2\sin(3x-\pi)+1$ とするとき，関数 $f(x)$ の基本周期を求め，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2)　周期が 1，すなわち $f(x+1)=f(x)$ を満たす関数 $f(x)$ を 3 つ挙げよ．ただし，$f(x)$ は定数関数でないものとする．

(3)　関数 $f(x)$ の周期が 2 で，$-1\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)=|x|$ であるとする．このとき $y=xf(x)$ のグラフを $-1\leqq x\leqq 3$ の範囲でかけ．

(4)　関数 $f(x)=\sin x^2$ は周期関数か否か．周期関数ならばそれを示し，基本周期を求めよ．また，周期関数でないならば，それを示せ．

< Note >

第７講　周期関数について…

[7] 次の各問いに答えよ.

(1) $f(x)=\sin^3 x-\dfrac{3}{4}\sin x$ の基本周期が $\dfrac{2}{3}\pi$ であることを示せ.

(2) 関数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ が p を周期とする周期関数であり，さらに定数 M に対し $|f(x)|\leqq M$ $(0\leqq x\leqq p)$ を満たしていれば，すべての実数 x について $|f(x)|\leqq M$ が成り立つことを示せ.

＜ Note ＞

第８講　定義に従って微分

8　次の各問いに答えよ．ただし，関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は微分可能であるものとする．

(1)　自然数 n に対して $f(x)=x^n$ とおくとき，$f(x)$ を定義に従って微分せよ．

(2)　実数 α に対し，$f(x)=\alpha g(x)$ とするとき，$f'(x)=\alpha g'(x)$ であることを示せ．また，$f(x)=g(x)+h(x)$ とおくとき，$f'(x)=g'(x)+h'(x)$ であることを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ．

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^nf(x)-x^nf(a)}{x-a}$ (n は自然数) を $f(a)$ と a，及び $f'(a)$ を用いて表せ．

＜ Note ＞

第８講　定義に従って微分

8　次の各問いに答えよ.

(1)　関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ の $x=r$ における微分係数 $f'(r)$ を定義に従って求めよ.

(2)　任意の実数 x に対して微分可能な関数 $f(x)$ が $f(2x)=2f(x)$ を満たすとき, $f'(2x)=f'(x)$ であることを示せ.

【選択肢】

(1)　㋐　$f'(r)=2ar$　　㋑　$f'(r)=2ar+b$　　㋒　$f'(r)=2ax+b$

＜ Note ＞

第９講　３次のグラフと直線など

9　曲線 $C: y=x^3-3x+3$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　C 上の点 $(2,\ 5)$ における接線 l_1 の方程式を求めよ．また，C と l_1 の交点の x 座標を求めよ．

(2)　点 $(2,\ -3)$ から曲線 C に引いた接線の方程式を求めよ．

(3)　点 $(2,\ k)$ から曲線 C に引いた接線の本数は k の値によってどのように変化するか調べよ．

(4)　点 $(2,\ 1)$ を通る傾き m の直線が，曲線 C と異なる３つの点を共有しているという．その３点を x 座標の小さい方からP，Q，Rとするとき，Qが線分PRの中点となるような m の値を求めよ．

＜ Note ＞

第9講　3次のグラフと直線など

9　a, b は正の実数とする．点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ と曲線 $C : y = x^2(x+1)+b$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　点Pから曲線 C へ異なる3本の接線が引けるとする．このとき，a, b の間に成り立つ不等式を求めよ．

(2)　さらに，(1)の3本の接線のうちの1本と曲線 C との接点の x 座標が $2a$ となるとする（この接線を l とする）．このとき，a, b の満たす条件を求め，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

(3)　上記の3本の接線のうち，l 以外の2本と曲線 C との接点の x 座標をそれぞれ α, β とする．$(\alpha-\beta)^2$ の最大値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐ $b<\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{27}$　㋑ $b>\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{27}$　㋒ $b\leqq\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{27}$

(2)　㋐ $b=4a^3\ \left(0<a\leqq\dfrac{1}{3}\right)$　㋑ $b=4a^3\ \left(0<a<\dfrac{1}{3}\right)$　㋒ $b=4a^3\ \left(a>\dfrac{1}{3}\right)$

(3)　㋐ $\dfrac{2}{15}$　㋑ $\dfrac{4}{15}$　㋒ $\dfrac{4}{5}$

< Note >

第 10 講　３次の接線と交点について

10　曲線 $C : y=x^3+2x^2+3x+4$ の $x=5$ における接線を l とする．l の方程式を求めよ．また，C と l の交点の x 座標を求めよ．

＜ Note ＞

第 10 講　3 次の接線と交点について

10　3 次関数 $f(x)=x^3+px^2+qx$ (p, q は定数) がある．$x=a$ における曲線 $y=f(x)$ の接線が接点 P$(a,\ f(a))$ 以外の点 Q で $y=f(x)$ のグラフと交わっているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 Q の x 座標 b を a と p で表せ．

(2)　$x=c$ における $y=f(x)$ の接線が点 P を通るような実数 c のうち，$c\neq a$ であるものを a と p で表せ．

(3)　$\dfrac{f'(b)-f'(a)}{f'(a)-f'(c)}$ の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$b=2a+p$　$(a\neq -p)$　　㋑　$b=-\dfrac{a+p}{2}$　$\left(a\neq -\dfrac{1}{3}p\right)$

　　㋒　$b=-2a-p$　$\left(a\neq -\dfrac{1}{3}p\right)$

(2)　㋐　$c=-\dfrac{a+p}{2}$　$\left(a\neq -\dfrac{1}{3}p\right)$　　㋑　$c=\dfrac{a+p}{2}$　$(a\neq p)$

　　㋒　$c=-2a-p$　$\left(a\neq -\dfrac{1}{3}p\right)$

(3)　㋐　2　　㋑　8　　㋒　4

＜ Note ＞

第11講　3次のグラフについて

11 次の各問いに答えよ．ただし，k は定数とする．

(1) 関数 $y=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ．

(2) 関数 $f(x)=x^3-3(k+1)x^2+12kx$ の $x \geqq 0$ における最小値を求めよ．

(3) 方程式 $x^3-3x^2=k$ が異なる3つの実数解をもち，それらの中で最小のものを α とするとき，α のとり得る値の範囲を求めよ．

＜ Note ＞

第 11 講　3 次のグラフについて

11　関数 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+(1-a^2)x$ の $0\leqq x\leqq 2$ における最大値を $f(a)$，最小値を $g(a)$ とする．$a\geqq 0$ のとき，関数 $f(a)$ と $g(a)$ について $b=f(a)$ と $b=g(a)$ のグラフをかけ．

＜ Note ＞

第 12 講　3 次方程式の実数解について

12　次の各問いに答えよ．ただし，実数 x に対し，x 以下の最大整数を x の整数部分とし $[x]$ で表し，このときの $x-[x]$ を x の小数部分とする．

(1)　$f(x)=x^3-4x+1$ に関して，3 次方程式 $f(x)=0$ の異なる 3 つの実数解を小さい方から α，β，γ とする．α，β，γ の整数部分をそれぞれ求めよ．また，α，β，γ のうち小数部分が最小となるものはどれか．

(2)　$g(x)=x^3+3x^2+mx+1$ について，3 次方程式 $g(x)=0$ の異なる実数解の個数が 3 個，2 個，1 個となる条件をそれぞれ求めよ．

< Note >

第 12 講　３次方程式の実数解について

12　$f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$ とする．方程式 $f(x)=0$ は異なる３つの実数解をもち，その中で正であるものはただ１つであることを示せ．また，その解を α とするとき，α の小数第１位の数を求めよ．

【選択肢】　㋐　6　　㋑　7　　㋒　8

＜ Note ＞

第13講　面積以外の積分計算

13　次の各問いに答えよ.

(1)　$f(x)=-x+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(2)　$\int_a^x f(t)dt=x^3-3x^2$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ.

(3)　$f(x)=\int_x^{x+1}|t(t-2)|dt$ を求めよ.

＜ Note ＞

第 13 講　面積以外の積分計算

13　次の各問いに答えよ．

(1)　a を正の定数とする．

$$f(x)=ax+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$$

を満たす関数 $f(x)$ がただ１つしか存在しないように定数 a の値を定めよ．また，そのときの $f(x)$ を求めよ．

(2)　関数 $f(t)=\int_t^{t+1}|x^2-1|\,dx$ の値を最小にする t の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$a=-3+2\sqrt{3}$，$f(x)=(-3+2\sqrt{3})x+2-\sqrt{3}$

　　㋑　$a=3-2\sqrt{3}$，$f(x)=(3-2\sqrt{3})x-2+\sqrt{3}$

　　㋒　$a=-3-2\sqrt{3}$，$f(x)=-(3+2\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}$

(2)　㋐　$t=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$　　㋑　$t=\dfrac{-1\pm2\sqrt{3}}{2}$　　㋒　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

< Note >

第 14 講　積分の公式について

14　α，β を実数とするとき，次の定積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2dx$

(2)　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$

(3)　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)dx$

(4)　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m dx$　(m は自然数)

＜ Note ＞

第 14 講　積分の公式について

14　α，β，γ を実数とするとき，次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx$

(2) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx$

【選択肢】

(1) ㋐ $\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(\alpha+\beta-2\gamma)$　㋑ $\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(2\gamma-\alpha-\beta)$

㋒ $\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^2(2\gamma-\alpha-\beta)^2$

(2) ㋐ $\dfrac{2}{15}(\beta-\alpha)^5$　㋑ $\dfrac{1}{15}(\beta-\alpha)^5$　㋒ $\dfrac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$

＜ Note ＞

第 15 講　２次の面積の計算

15 次の各問いに答えよ．ただし，a，b，c，d，p，q，α，β は実数の定数とし，$\alpha<\beta$ とする．

(1) 曲線 $C_1 : y=2x^2+3x+4$ と直線 $l_1 : y=ax+b$ が２点で交わっていて，その x 座標が $x=5$，７であるとき，C_1 と l_1 で囲まれる部分の面積 S_1 を求めよ．

(2) 曲線 $C_2 : y=5x^2+6x+7$ と直線 $l_2 : y=cx+d$ が１点で接していて，その x 座標が $x=3$ であるとき，C_2 と l_2，そして直線 $x=5$ で囲まれる部分の面積 S_2 を求めよ．

(3) 曲線 $C : y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ に対し，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C に２本の接線が引けるとする．その接線を l，m とし，C と l の接点を $\mathrm{Q}(\alpha,\ a\alpha^2+b\alpha+c)$，$C$ と m の接点を $\mathrm{R}(\beta,\ a\beta^2+b\beta+c)$ とする．曲線 C と線分 QR で囲まれる部分の面積 S を a，α，β で表せ．また，C と l と m で囲まれる部分の面積 T を a，α，β で表せ．

＜ Note ＞

第 15 講　2 次の面積の計算

15　次の各問いに答えよ．

(1)　放物線 $y=x^2$ の上を動く 2 点 P，Q があって，この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき，PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ．

(2)　2 次関数 $y=x^2$ のグラフを Γ とする．$b<a^2$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から Γ へ接線を 2 本引き，接点を A，B とする．Γ と 2 本の線分 PA，PB で囲まれた図形の面積が $\dfrac{2}{3}$ になるような点 P の軌跡を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$y=x^2-\sqrt[3]{\dfrac{9}{16}}$　㋑　$y=x^2+\dfrac{3}{4}$　㋒　$y=x^2+\sqrt[3]{\dfrac{9}{16}}$

(2)　㋐　放物線 $y=x^2-1$　㋑　放物線 $y=x^2+1$　㋒　放物線 $y=x^2-\dfrac{1}{4}$

＜ Note ＞

第16講　群数列

16　次の各問いに答えよ．

(1)　次のように，正の偶数を順に第 n 群に n 個の偶数が入るように分けた．

$$\{2\},\ \{4,\ 6\},\ \{8,\ 10,\ 12\},\ \{14,\ 16,\ 18,\ 20\},\ \{22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 30\},\ \cdots\cdots$$

このとき，第 n 群に属している項の初項と末項，そして総和を求めよ．また，20000は第何群に属していて，その群の中で何項目であるかを求めよ．

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=pa_n-p$ $(p\neq1)$，$b_1=q$，$b_{n+1}=b_n+(-1)^{n+1}q$（q は自然数）で定められる数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を考える．$\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け，第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする．m を正の偶数とするとき，$\{a_n\}$ の第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ．

＜ Note ＞

第16講　群数列

16　次の各問いに答えよ.

(1)　正の奇数の列 1, 3, 5, 7, 9, 11, … を

[1], [3, 5], [7, 9, 11], [13, ……], ……

のように, 順番に1個, 2個, 3個, … ずつのブロックに区切るものとする.

(i)　100番目のブロックの最初の数を求めよ.

(ii)　100番目のブロックに現れる100個の数の和を求めよ.

(2)　数列 $\{a_N\}$ $(N=1, 2, 3, \cdots)$ において, $\{a_1, a_2\}$ を第1区, $\{a_3, a_4, a_5\}$ を第2区, $\{a_6, a_7, a_8, a_9\}$ を第3区とし, 以下 $\{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots\cdots, a_{N+n}\}$ を第 n 区, $\{a_{N+n+1}, a_{N+n+2}, a_{N+n+3}, \cdots\cdots, a_{N+2(n+1)}\}$ を第 $(n+1)$ 区とするとき, 以下の設問に答えよ. ただし, $a_1=1$ とし, 第 n 区 $(n=1, 2, 3, \cdots)$ は公差が n の等差数列であり, $a_{N+n+1}-a_{N+n}=n+1$ を満たすものとする.

(i)　N を n で表せ.

(ii)　a_N, a_{N+n} を n で表せ.

【選択肢】

(1)　(i)　㋐ 10000　㋑ 9901　㋒ 9900

(ii)　㋐ 1000000　㋑ 560000　㋒ 20000

(2)　(i)　㋐ $N=\frac{1}{2}n(n-1)$　㋑ $N=\frac{1}{2}n(n+1)$　㋒ $N=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

(ii)　㋐ $a_N=\frac{1}{3}(n-1)(n^2-2n+3)$, $a_{N+n}=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$

㋑ $a_N=\frac{1}{3}(n+1)(n^2+2n+3)$, $a_{N+n}=\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$

㋒ $a_N=\frac{1}{3}n(n^2+2)$, $a_{N+n}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

< Note >

第17講　基本漸化式 ― Part Ⅰ ―

17　次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ．

(1)　$x_{n+1}=x_n+3,\quad x_1=1$

(2)　$y_{n+1}=2y_n,\quad y_1=3$

(3)　$z_{n+1}=z_n+2^n,\quad z_1=3$

(4)　$a_{n+1}=-2a_n+1,\quad a_1=1$

(5)　$a_{n+1}=2a_n+2n-4,\quad a_1=1$

＜ Note ＞

第17講　基本漸化式 ― Part Ⅰ ―

17　次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ.

(1)　$a_{n+1}=a_n-2,\quad a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=-2a_n,\quad a_1=2$

(3)　$a_{n+1}=a_n+2n,\quad a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1,\quad a_1=1$

(5)　$a_{n+1}=3a_n+4n,\quad a_1=1$

【選択肢】

(1)　㋐ $a_n=2n-1$　㋑ $a_n=-2n+1$　㋒ $a_n=-2n+3$

(2)　㋐ $a_n=(-2)^{n-1}$　㋑ $a_n=-(-2)^{n-1}+3$　㋒ $a_n=-(-2)^n$

(3)　㋐ $a_n=n^2-n+1$　㋑ $a_n=2n^2-n$　㋒ $a_n=n^2-n$

(4)　㋐ $a_n=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n$　㋑ $a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　㋒ $a_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(5)　㋐ $a_n=3^{n-1}-2n+2$　㋑ $a_n=3^n-2n$　㋒ $a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

＜ Note ＞

第18講　基本漸化式 ―Part Ⅱ―

18　次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ．

(6)　$a_{n+1}=3a_n+2^n$,　$a_1=1$

(7)　$a_{n+1}=4a_n+4^n$,　$a_1=2$

(8)　$a_{n+2}-2a_{n+1}-8a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

(9)　$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

＜ Note ＞

第18講　基本漸化式 ― Part Ⅱ ―

18　次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ.

(6)　$a_{n+1}=-2a_n+3^n$,　$a_1=1$

(7)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{2^n}$,　$a_1=2$

(8)　$a_{n+2}-a_{n+1}-2a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

(9)　$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

【選択肢】

(6)　㋐　$a_n=\dfrac{3^{n-1}+(-2)^{n-1}}{2}$　㋑　$a_n=\dfrac{3^n-(-2)^n}{5}$　㋒　$a_n=3^n+(-2)^n$

(7)　㋐　$a_n=\dfrac{n+1}{2^{n-1}}$　㋑　$a_n=\dfrac{3n-1}{2^{n-1}}$　㋒　$a_n=\dfrac{n+3}{2^n}$

(8)　㋐　$a_n=\dfrac{2^n+(-1)^n}{3}$　㋑　$a_n=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$　㋒　$a_n=\dfrac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}$

(9)　㋐　$a_n=n3^{n-1}$　㋑　$a_n=(n-1)^2 3^{n-1}$　㋒　$a_n=(n-1)3^{n-2}$

＜ Note ＞

第 19 講　漸化式は数行で解け！

19　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1)　$a_{n+1}=-2a_n+1$,　$a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=2a_n+2n-4$,　$a_1=1$

(3)　$a_{n+1}=3a_n+2^n$,　$a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=4a_n+4^n$,　$a_1=2$

< Note >

第19講　漸化式は数行で解け！

19　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_{n+1}=3a_n+2,\quad a_1=2$

(2)　$a_{n+1}=4a_n+6n+4,\quad a_1=0$

(3)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+(-1)^n,\quad a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=-2a_n+(-2)^n,\quad a_1=3$

【選択肢】

(1)　㋐　$a_n=4\cdot3^{n-1}-2$　　㋑　$a_n=3^{n+1}-6$　　㋒　$a_n=3^n-1$

(2)　㋐　$a_n=4^{n-1}-2n+1$　　㋑　$a_n=4^n-2n-2$　　㋒　$a_n=4^n-3n-1$

(3)　㋐　$a_n=\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-2(-1)^n\right\}$　　㋑　$a_n=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-2(-1)^n$

　　㋒　$a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}-(-1)^{n-1}$

(4)　㋐　$a_n=(n-7)(-2)^{n-2}$　　㋑　$a_n=(n+2)(-2)^{n-1}$

　　㋒　$a_n=(2n+1)(-2)^{n-1}$

＜ Note ＞

第20講　数列の和と一般項

20　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．以下の条件を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=n^3+2n^2$

(2)　$S_n=2^n+3^n$

(3)　$S_n=2a_n+n+1$

(4)　$S_n={a_n}^2+\dfrac{n}{4}$，　$a_n>0$

＜ Note ＞

第20講　数列の和と一般項

20　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，関係式 $S_n=\frac{3}{2}a_n-n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立っている．一般項 a_n を求めよ．

【選択肢】

㋐　$a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+1$　　㋑　$a_n=2^n$　　㋒　$a_n=3^n-1$

＜ Note ＞

第 21 講　数学的帰納法

21　数学的帰納法を用いて，以下の式を証明せよ．ただし，n は自然数とする．

(1)　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　……①

(2)　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}\geqq\dfrac{2n}{n+1}$　……②

(3)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{5}\left(a_n+\dfrac{4}{a_n}\right)$，$a_1=\dfrac{4}{5}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ において，$a_n\geqq\dfrac{4}{5}$　……③

(4)　$n!\geqq n\cdot2^{n-1}-n^2+n$　……④

＜ Note ＞

第 21 講　数学的帰納法

21　自然数 n に対して，以下を数学的帰納法を用いて証明せよ．

(1)　$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$

$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\quad(n\geqq1)\qquad\cdots\cdots(*)$$

(2)　$3^n>n^2\quad(n\geqq2)$

＜ Note ＞

第22講　分点公式と平面ベクトル

22　平行四辺形 OACB に関して，線分 AC の中点を M，両端を除く線分 OA 上の点を T（つまり $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$〔$0<\alpha<1$〕とおく)，線分 TC と線分 OM の交点を P，直線 AP と直線 OB の交点を Q，直線 AP と直線 BC の交点を R とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3)　点 R が点 P と点 Q の中点になるときの α の値を求めよ．

< Note >

第 22 講　分点公式と平面ベクトル

22　三角形 OAB の 2 辺 OA，OB をそれぞれ 3：1，4：1 に内分する点を C，D とし，線分 BC と線分 AD の交点を P，線分 CD と直線 OP の交点を Q とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とおくとき，

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

【選択肢】

(1)　㋐　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$　㋑　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$　㋒　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(2)　㋐　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$　㋑　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{4}{9}\vec{b}$　㋒　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{9}\vec{b}$

＜ Note ＞

第 23 講　内積と平面ベクトル

23　三角形 ABC の外接円 O の中心を O とすると

$$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしているとする．円 O の半径を 1 とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．

(2)　三角形 ABC の面積 S を求めよ．

＜ Note ＞

第23講　内積と平面ベクトル

23　三角形ABCの内部に点Pがある．$2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ を満たし，$AP=\sqrt{2}$，$BP=2$，$CP=1$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}$ を求めよ．

(2)　三角形ABCの3辺の長さと面積を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-2$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=-1$

　　㋑　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-1$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

　　㋒　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-1$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=-2$

(2)　㋐　$AB=\sqrt{10}$，$BC=CA=2\sqrt{5}$，面積 5

　　㋑　$AB=\sqrt{10}$，$BC=CA=\sqrt{5}$，面積 $\frac{5}{2}$

　　㋒　$AB=\sqrt{5}$，$BC=CA=\sqrt{10}$，面積 $\frac{2}{5}$

＜ Note ＞

第 24 講　平面ベクトルで垂直といえば…

24　三角形 OAB に対して次の各問いに答えよ.

(1)　点 A から直線 OB に下ろした垂線の足を H とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ.

(2)　直線 OB に関する点 A の対称点を C とする. $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ.

(3)　(2)の点 C を直線 OA に関して対称移動した点を D とする. $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ.

(4)　OP が三角形 OAB の外接円の直径であるとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ.

＜ Note ＞

第 24 講　平面ベクトルで垂直といえば…

24　三角形 ABC において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおき，さらに $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を $\vec{b}\cdot\vec{c}=m$，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ の大きさをそれぞれ $|\vec{b}|=b$，$|\vec{c}|=c$ とおく．

(1)　直線 AB に関して，点 C と対称な点を D とするとき，ベクトル $\overrightarrow{AD}$ をベクトル $\vec{b}$，$\vec{c}$ と実数 m，b，c を用いて表せ．

(2)　直線 AC に関して，点 B と対称な点を E とするとき，ベクトル $\overrightarrow{DE}$ をベクトル $\vec{b}$，$\vec{c}$ と実数 m，b，c を用いて表せ．

(3)　ベクトル $\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{BC}$ が平行なとき，三角形 ABC はどのような三角形か．

【選択肢】

(1)　㋐　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2m}{b^2}\vec{b}+\vec{c}$　㋑　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{m}{b^2}\vec{b}-\vec{c}$　㋒　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2m}{b^2}\vec{b}-\vec{c}$

(2)　㋐　$\overrightarrow{DE}=-\left(\dfrac{2m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{2m}{c^2}+1\right)\vec{c}$　㋑　$\overrightarrow{DE}=\left(\dfrac{2m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{2m}{c^2}+1\right)\vec{c}$

㋒　$\overrightarrow{DE}=-\left(\dfrac{m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{m}{c^2}+1\right)\vec{c}$

(3)　㋐　AB＝AC の二等辺三角形（$\angle A\neq120^\circ$）　㋑　$\angle A=90^\circ$ の直角三角形

㋒　$\angle A=90^\circ$ の直角三角形または AB＝AC の二等辺三角形（$\angle A\neq120^\circ$）

< Note >

テキスト解答

第１講　２次関数の最大最小

1　a を定数とするとき，関数 $f(x)=2x^2-4x-a^2+5a$ の $a\leqq x\leqq a+2$ における最小値を $m(a)$，最大値を $M(a)$ とする．以下の各問いに答えよ．

(1)　すべての実数 x に対して $f(x)>0$ となる a の値の範囲を求めよ．

(2)　$x>a$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)>0$ となるよう a の値の範囲を定めよ．

(3)　$m(a)$ を求め，関数 $b=m(a)$ のグラフを図示せよ．

(4)　$M(a)$ を求め，関数 $b=M(a)$ のグラフを図示せよ．

(5)　$m(a)$ の最大値を求めよ．ただし，$-5\leqq a\leqq 2$ とする．

【答】　(1) $\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}<a<\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$　(2) $a>\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$

(3) $m(a)=\begin{cases} a^2+a & (a\geqq 1) \\ -a^2+5a-2 & (-1<a<1) \\ a^2+9a & (a\leqq -1) \end{cases}$　(4) $M(a)=\begin{cases} a^2+a & (a\leqq 0) \\ a^2+9a & (a>0) \end{cases}$　(5) 6

【解答】

(1)　$f(x)=2(x-1)^2-a^2+5a-2$ より，$-a^2+5a-2>0$ となればよい．

$$a^2-5a+2<0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{\frac{5-\sqrt{17}}{2}<a<\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$$

(2)　$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=1$ であるから a と 1 の大小関係を考えて，

$a<1$ かつ $f(1)>0$　または　$a\geqq 1$ かつ $f(a)\geqq 0$　となればよい．

$a<1$　かつ　$f(1)=-a^2+5a-2>0$ のとき，

$a<1$　かつ　$\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}<a<\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$

$\therefore\ \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}<a<1$　……①

$a\geqq 1$　かつ　$f(a)=a(a+1)\geqq 0$ のとき，$a\geqq 1$　かつ　$a\leqq -1,\ 0\leqq a$

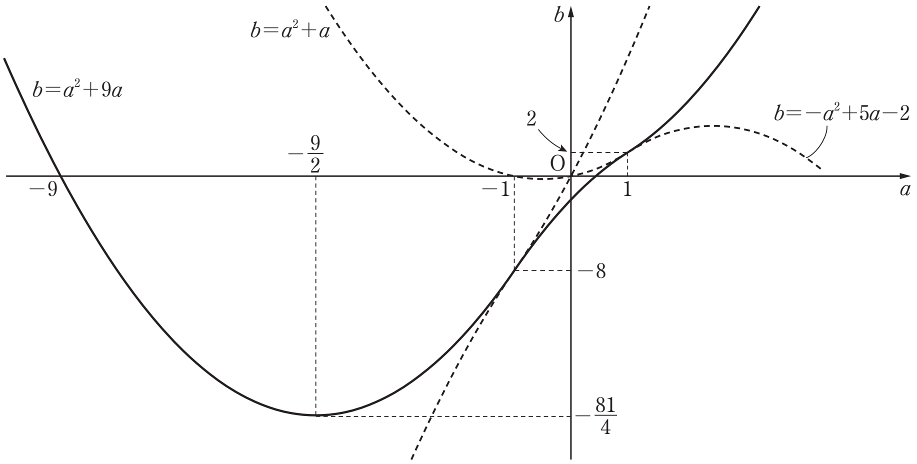
$\therefore\ a\geqq 1$　……②

①または②より，$\boldsymbol{a>\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}}$

(3)　$y=f(x)$ のグラフの軸と区間 $a\leqq x\leqq a+2$ の位置関係を考えて

$$m(a)=\begin{cases} f(a) & (a\geqq 1) \\ f(1) & (-1<a<1) \\ f(a+2) & (a\leqq -1) \end{cases} =\begin{cases} \boldsymbol{a^2+a} & \boldsymbol{(a\geqq 1)} \\ \boldsymbol{-a^2+5a-2} & \boldsymbol{(-1<a<1)} \\ \boldsymbol{a^2+9a} & \boldsymbol{(a\leqq -1)} \end{cases}$$

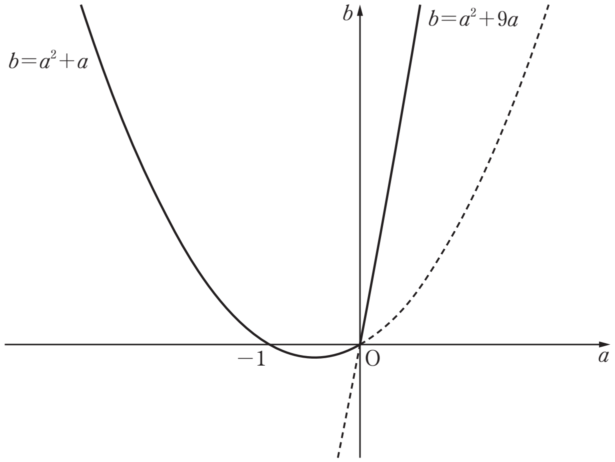
よって，$b=m(a)$ のグラフは下図の実線部分.



(4)　$y=f(x)$ のグラフの両端における値を比較して

$$M(a)=\begin{cases} f(a) & (a\leqq 0) \\ f(a+2) & (a>0) \end{cases}=\begin{cases} \boldsymbol{a^2+a} & \boldsymbol{(a\leqq 0)} \\ \boldsymbol{a^2+9a} & \boldsymbol{(a>0)} \end{cases}$$

よって，$b=M(a)$ のグラフは下図の実線部分.



(5)　(3)より $m(a)$ の $-5\leqq a\leqq 2$ における最大値は $m(2)=\boldsymbol{6}$

第２講　２次方程式の解の配置

> **2**　x の２次方程式　$x^2-(a+2)x-a+1=0$　……①　に関して，次の各問いに答えよ．
> (1)　①は $x=-1$ を解にもたないことを示せ．
> (2)　①が正の解と負の解を１つずつもつような a の値の範囲を求めよ．
> (3)　①が異なる２つの正の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．
> (4)　(3)のとき，小さい方の解を α とする．α のとり得る値の範囲を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) $a>1$　(3) $0<a<1$　(4) $0<\alpha<1$

【解答】

$f(x)=x^2-(a+2)x-a+1$ とおく．

(1)　$f(-1)=4\neq 0$ より①が $x=-1$ を解にもつことはない．

(2)　$f(0)<0$ となればよい．$f(0)=-a+1<0$ より　$\boldsymbol{a>1}$

(3)　$f(x)=\left(x-\dfrac{a+2}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}a^2-2a$ より，$y=f(x)$ のグラフの頂点の y 座標，軸の位置，及び $x=0$ における値を考えると

$$-\frac{1}{4}a^2-2a<0 \quad \text{かつ} \quad \frac{a+2}{2}>0 \quad \text{かつ} \quad f(0)>0$$

となればよい．すなわち

$$-\frac{1}{4}a(a+8)<0 \quad \text{かつ} \quad a>-2 \quad \text{かつ} \quad -a+1>0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{0<a<1}$$

(4)　(3)より $0<a<1$ であるから $f(1)=-2a<0$，よって $f(x)=0$ は１より大きい解と１より小さい解を１つずつもつので　$\alpha<1$

①の解が α より

$$\alpha^2-(a+2)\alpha-a+1=0$$
$$(\alpha-1)^2=(\alpha+1)a$$

ここで α は小さい方の正の解より $\alpha>0$，したがって $\alpha+1>0$ であるから

$$\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha+1}=a$$

よって，$0<a<1$ より

$$0<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha+1}<1$$
$$0<(\alpha-1)^2<\alpha+1$$
$$\alpha\neq 1 \quad \text{かつ} \quad \alpha(\alpha-3)<0$$
$$0<\alpha<1,\ 1<\alpha<3$$

$\alpha<1$ より，求める範囲は

$$\boldsymbol{0<\alpha<1}$$

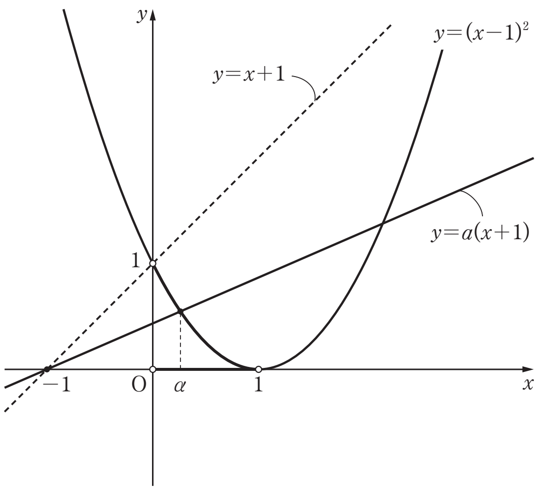
≪別解≫

①より

$$x^2-(a+2)x-a+1=0$$
$$x^2-2x+1=a(x+1)$$
$$(x-1)^2=a(x+1)$$

①の実数解は放物線 $y=(x-1)^2$ と直線 $y=a(x+1)$ のグラフの共有点の x 座標に一致する．(3)より直線の傾き a の範囲は $0<a<1$ であるので，グラフより α のとり得る値の範囲は

$$\mathbf{0<\alpha<1}$$



第３講　対数の計算

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ を示せ．ただし，a は１でない正の定数，x，y はともに正の実数とする．

(2)　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とするとき，$\log_{10}48$ と $\log_{10}50$ の値をそれぞれ求めよ．また，$\log_{10}7$ の小数第１位と第２位の数を求めよ．

(3)　a を１でない正の実数とする．不等式

$$\log_{\sqrt{a}}(3-x)-\frac{1}{\log_2 a}>\log_a(x+2)+1$$

を満たす整数 x がただ１つ存在するための a の満たす条件を求めよ．

(4)　$2\log_y x-\log_x y>-1$ を満たす点 $(x,\ y)$ が存在する領域を図示せよ．

【答】 (1) 略　(2) $\log_{10}48=1.6811$，$\log_{10}50=1.6990$，小数第１位は８，小数第２位は４

(3) $\dfrac{1}{8}<a\leqq\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{9}{4}\leqq a<8$　(4) 略

【解答】

(1)　$\log_a xy=p$，$\log_a x=q$，$\log_a y=r$ とおくと，$a^p=xy$，$a^q=x$，$a^r=y$ より

$a^p=a^qa^r$ すなわち $a^p=a^{q+r}$　　$\therefore\ \ p=q+r$

よって，$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(2)　$\log_{10}48=4\log_{10}2+\log_{10}3=4\times0.3010+0.4771=\mathbf{1.6811}$

$\log_{10}50=\log_{10}100-\log_{10}2=2-0.3010=\mathbf{1.6990}$

ここで $\log_{10}48<\log_{10}49<\log_{10}50$ より　$1.6811<2\log_{10}7<1.6990$

$0.84055<\log_{10}7<0.8495$

となるので，$\log_{10}7$ の小数第１位は **8**，小数第２位は **4**

(3)　真数条件より，$3-x>0$ かつ $x+2>0$　　$\therefore\ \ -2<x<3$

$$\log_{\sqrt{a}}(3-x)=\log_a(3-x)^2,\qquad \frac{1}{\log_2 a}=\log_a 2$$

であることより，与式は

$$\log_a(3-x)^2-\log_a 2>\log_a(x+2)+\log_a a$$

$$\log_a\frac{(x-3)^2}{2}>\log_a a(x+2)$$

$$\begin{cases}(x-3)^2>2a(x+2) & (a>1) & \cdots\cdots① \\ (x-3)^2<2a(x+2) & (0<a<1) & \cdots\cdots②\end{cases}$$

ここで $y=(x-3)^2$ と $y=2(x+2)$ のグラフの共有点の x 座標は $(x-3)^2=2(x+2)$ より $x=4\pm\sqrt{11}$ となるので，$-2<x<3$ の区間に与式を満たす整数解が１つだけ存在する条件は

(Ⅰ)　$a>1$ のとき，$x=-1$ がただ１つの解となるため

①は $x=-1$ で成り立ち，$x=0$ では成り立たない．すなわち

$\{(-1)-3\}^2>2a(-1+2)$　かつ　$(0-3)^2\leqq2a(0+2)$

$\therefore\quad \dfrac{9}{4} \leqq a < 8$　($a > 1$ を満たす)

(Ⅱ)　$0 < a < 1$ のとき，$x = 2$ がただ１つの解となるため

②は $x = 2$ で成り立ち，$x = 1$ では成り立たない．すなわち

$(2-3)^2 < 2a(2+2)$　かつ　$(1-3)^2 \geqq 2a(1+2)$

$\therefore\quad \dfrac{1}{8} < a \leqq \dfrac{2}{3}$　($0 < a < 1$ を満たす)

(Ⅰ)，(Ⅱ)より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{8} < a \leqq \dfrac{2}{3},\ \dfrac{9}{4} \leqq a < 8}$

(4)　真数条件より，$y > 0$　かつ　$x > 0$

底の条件より，$x > 0$，$x \neq 1$　かつ　$y > 0$，$y \neq 1$

よって　$x > 0$，$x \neq 1$，$y > 0$，$y \neq 1$

この条件のもとで，与式は

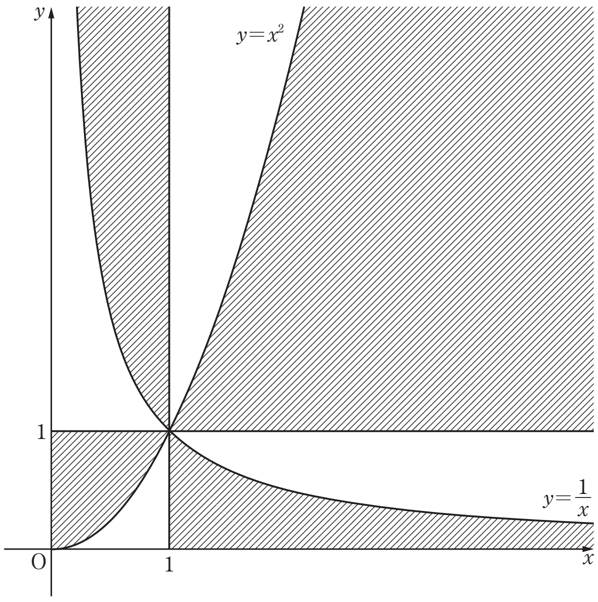
$$\log_x y - \frac{2}{\log_x y} < 1$$

$$\log_x y(\log_x y - 2)(\log_x y + 1) < 0$$

$$\log_x y < -1,\ 0 < \log_x y < 2$$

$$\begin{cases} y < \dfrac{1}{x},\ 1 < y < x^2 & (x > 1) \\ y > \dfrac{1}{x},\ x^2 < y < 1 & (0 < x < 1) \end{cases}$$

よって求める領域は，下図の境界を含まない斜線部分.



第４講　三角比といえば…

4　円に内接する四角形 ABCD が AB＝3，BC＝2，CD＝1，DA＝4 を満たしている．また，直線 AB と直線 CD の交点を E，直線 AD と直線 BC の交点を F，線分 AC と線分 BD の交点を P とし，三角形 BCE の外接円と直線 EF の交点で E 以外のものを点 Q とする．次の各問いに答えよ．

(1)　点 Q は三角形 CDF の外接円上にあることを示せ．
(2)　線分 BD，線分 BE，線分 DF，線分 EF の長さをそれぞれ求めよ．
(3)　四角形 ABCD の面積 S を求めよ．
(4)　線分 AP の長さを求めよ．
(5)　sin∠APB の値を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) $\mathrm{BD}=\sqrt{\dfrac{55}{7}}$，$\mathrm{BE}=\dfrac{5}{3}$，$\mathrm{DF}=\dfrac{5}{4}$，$\mathrm{EF}=\dfrac{\sqrt{2065}}{12}$　(3) $2\sqrt{6}$

(4) $\dfrac{6\sqrt{385}}{35}$　(5) $\dfrac{4\sqrt{6}}{11}$

【解答】

(1)　B，C，Q，E は同一円周上より，∠CQE＝∠ABC
また，A，B，C，D は同一円周上より，∠ABC＝∠CDF
よって ∠CQE＝∠CDF より，Q，C，D，F は同一円周上にある．

(2)　A，B，C，D は同一円周上より　∠BAD＋∠BCD＝π　よって

$$\cos\angle\mathrm{BAD}+\cos\angle\mathrm{BCD}=0$$

$$\frac{3^2+4^2-\mathrm{BD}^2}{2\times3\times4}+\frac{2^2+1^2-\mathrm{BD}^2}{2\times2\times1}=0$$

$$\mathrm{BD}^2=\frac{55}{7}\qquad\therefore\quad \mathbf{BD}=\sqrt{\frac{55}{7}}$$

方べきの定理より，BE(BE＋3)＝EC(EC＋1)　……①
△EBC と △EDA が相似であることより，EC：(BE＋3)＝2：4　　BE＋3＝2EC
これを①に代入，整理することで $\mathbf{BE}=\dfrac{5}{3}$ を得る．また，$\mathrm{EC}=\dfrac{7}{3}$ である．

メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AF}}\times\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CD}}\times\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}}=1\qquad \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{DF}+4}\times\frac{\frac{7}{3}}{1}\times\frac{3}{\frac{5}{3}}=1\qquad\therefore\quad \mathbf{DF}=\frac{5}{4}$$

$\mathrm{AE}=3+\dfrac{5}{3}=\dfrac{14}{3}$，$\mathrm{AF}=4+\dfrac{5}{4}=\dfrac{21}{4}$，$\cos\angle\mathrm{BAD}=\dfrac{3^2+4^2-\mathrm{BD}^2}{2\times3\times4}=\dfrac{5}{7}$　より

$$\begin{aligned}\mathrm{EF}^2&=\mathrm{AE}^2+\mathrm{AF}^2-2\times\mathrm{AE}\times\mathrm{AF}\times\cos\angle\mathrm{BAD}\\&=\left(\frac{14}{3}\right)^2+\left(\frac{21}{4}\right)^2-2\times\frac{14}{3}\times\frac{21}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{2065}{144}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathbf{EF}=\frac{\sqrt{2065}}{12}$$

(3)　$\sin\angle\mathrm{BAD}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$　より

$$S=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{AD}\times\sin\angle\mathrm{BAD}+\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{CD}\times\sin\angle\mathrm{BCD}$$

$$=\frac{1}{2}(3\times4+2\times1)\times\frac{2\sqrt{6}}{7}=\mathbf{2\sqrt{6}}$$

(4)　トレミーの定理より

$$\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\times\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\times\mathrm{AD}$$

$$\mathrm{AC}\times\sqrt{\frac{55}{7}}=3\times1+2\times4\qquad\therefore\quad\mathrm{AC}=\sqrt{\frac{77}{5}}$$

また，$\mathrm{AP}:\mathrm{PC}=(\mathrm{AB}\times\mathrm{AD}):(\mathrm{BC}\times\mathrm{CD})=6:1$ より　$\mathrm{AP}=\frac{6}{7}\times\mathrm{AC}=\mathbf{\frac{6\sqrt{385}}{35}}$

(5)　$S=\frac{1}{2}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}\times\sin\angle\mathrm{APB}$　より

$2\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times11\times\sin\angle\mathrm{APB}$

$$\therefore\quad\sin\angle\mathrm{APB}=\mathbf{\frac{4\sqrt{6}}{11}}$$

第５講　三角関数の公式の導き方

5　次の公式を導け.

(1)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(3)　$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

(4)　$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

【答】　略

【解答】

(1)　座標平面上の点を $\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{Q}(\sin\beta,\ \cos\beta)$，$\mathrm{P}'(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$，$\mathrm{Q}'(0,\ 1)$ とすると，P' と Q' は，それぞれ P と Q を原点を中心に β だけ回転移動した点であるので $\mathrm{PQ}^2=\mathrm{P}'\mathrm{Q}'^2$　よって

$$(\sin\beta-\cos\alpha)^2+(\cos\beta-\sin\alpha)^2=\{0-\cos(\alpha+\beta)\}^2+\{1-\sin(\alpha+\beta)\}^2$$

$$2-2\sin\alpha\cos\beta-2\cos\alpha\sin\beta=2-2\sin(\alpha+\beta)$$

$$\therefore\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

(2)　(1)の結果 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ において，α に $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，β に $-\beta$ を代入すると

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

よって

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\\&=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

(3)　加法定理 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ において $\alpha=\beta=\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\cos 2\theta&=\cos^2\theta-\sin^2\theta\\&=1-2\sin^2\theta\end{aligned}$$

を得る．よって，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

(4)　加法定理より，

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　と　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

の辺々の差をとると

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

ここで $\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくと $\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$ となるので

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

を導くことができる.

第６講　三角関数の合成（基本編）

6　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$f(\theta) = 3\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(2)　$f(\theta) = 3\sin\theta + 4\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．また，最大値を与える θ を θ_1 とするとき，$\tan 2\theta_1$ の値を求めよ．

(3)　$f(\theta) = \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + 3\cos^2\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(4)　$f(\theta) = \sin^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta - \sin\theta - 2\cos\theta + 1$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【答】 (1) 最大値 $2\sqrt{3}$，最小値 $\sqrt{3}$　(2) 最大値 5，最小値 3，$\tan 2\theta_1 = \dfrac{24}{7}$

(3) 最大値 $2+\sqrt{2}$，最小値 1　(4) 最大値 $6-\sqrt{5}$，最小値 1

【解答】

(1)　$f(\theta) = 2\sqrt{3}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$ であり，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ より，

$\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\mathbf{2\sqrt{3}}$ をとり

$\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$ すなわち $\theta = 0$ のとき最小値 $\mathbf{\sqrt{3}}$ をとる．

(2)　$f(\theta) = 5\sin(\theta + \alpha)$　（ただし，α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$ を満たす実数）

であり，$\alpha \leqq \theta + \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ より，

$\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ のとき最大値 **5** をとり

$\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 **3** をとる．

　また，$\theta_1 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ より

$$\tan 2\theta_1 = \tan(\pi - 2\alpha) = \frac{\tan\pi - \tan 2\alpha}{1 + \tan\pi\tan 2\alpha} = -\tan 2\alpha$$

$\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$ より $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{2\cdot\dfrac{4}{3}}{1 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^2} = -\dfrac{24}{7}$ であるから

$$\mathbf{\tan 2\theta_1 = \frac{24}{7}}$$

(3)　$f(\theta)=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}+2\times\dfrac{\sin 2\theta}{2}+3\times\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=\sin 2\theta+\cos 2\theta+2$

$=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

であり，$\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ より，

$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ のとき最大値 $\mathbf{2+\sqrt{2}}$ をとり

$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\mathbf{1}$ をとる．

(4)　$f(\theta)=(\sin\theta+2\cos\theta)^2-(\sin\theta+2\cos\theta)+1$ である．

ここで $t=\sin\theta+2\cos\theta$ とおくと

$t=\sqrt{5}\sin(\theta+\beta)$　（ただし，β は $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan\beta=2$ を満たす実数）

であり，$\beta\leqq\theta+\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}+\beta$ より，

$\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\beta$ のとき t は最大値 $\sqrt{5}$ をとり

$\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}+\beta$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき t は最小値 1 をとる．

よって，$1\leqq t\leqq\sqrt{5}$ である．

このとき $f(\theta)=t^2-t+1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ であるので，

$t=\sqrt{5}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\beta$ のとき最大値 $\mathbf{6-\sqrt{5}}$ をとり

$t=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\mathbf{1}$ をとる．

第7講　周期関数について…

7　次の各問いに答えよ．

ただし，$f(x)$ の基本周期とは，関数 $f(x)$ において $f(x+p)=f(x)$ が任意の実数 x に対して成り立つような 0 以外の定数 p のうち正の最小の値をいう．

(1)　$f(x)=2\sin(3x-\pi)+1$ とするとき，関数 $f(x)$ の基本周期を求め，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2)　周期が 1，すなわち $f(x+1)=f(x)$ を満たす関数 $f(x)$ を 3 つ挙げよ．ただし，$f(x)$ は定数関数でないものとする．

(3)　関数 $f(x)$ の周期が 2 で，$-1\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)=|x|$ であるとする．このとき $y=xf(x)$ のグラフを $-1\leqq x\leqq 3$ の範囲でかけ．

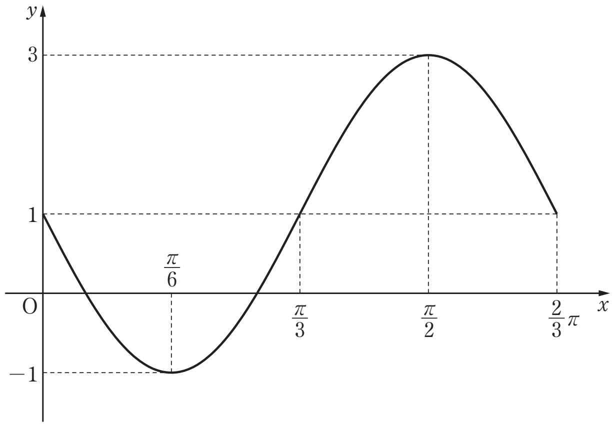
(4)　関数 $f(x)=\sin x^2$ は周期関数か否か．周期関数ならばそれを示し，基本周期を求めよ．また，周期関数でないならば，それを示せ．

【答】 (1) 基本周期は $\frac{2}{3}\pi$　(2)〈例〉$\sin 2\pi x$，$\tan \pi x$，$x-[x]$　(3) 略　(4) 略

【解答】

(1)　$f(x)=2\sin 3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ より，$f(x)$ の基本周期は $\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$ である．また，$y=f(x)$ のグラフは $y=2\sin 3x$ のグラフを x 軸方向に $+\frac{\pi}{3}$，y 軸方向に $+1$ だけ平行移動したもの．

よって，1 周期分のグラフをかくと下図のようになる．



(2)　$f(x)=\boldsymbol{\sin 2\pi x}$ とすると，$f(x+1)=\sin 2\pi(x+1)=\sin(2\pi x+2\pi)=\sin 2\pi x=f(x)$ であり，確かに周期は 1 となる．

$f(x)=\boldsymbol{\tan \pi x}$ とすると，$f(x+1)=\tan\pi(x+1)=\tan(\pi x+\pi)=\tan\pi x=f(x)$ であり，確かに周期は 1 となる．

x 以下の最大整数を $[x]$ で表し $f(x)=\boldsymbol{x-[x]}$ とすると，$f(x+1)=(x+1)-[x+1]$ $=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x)$ であり，確かに周期は 1 となる．

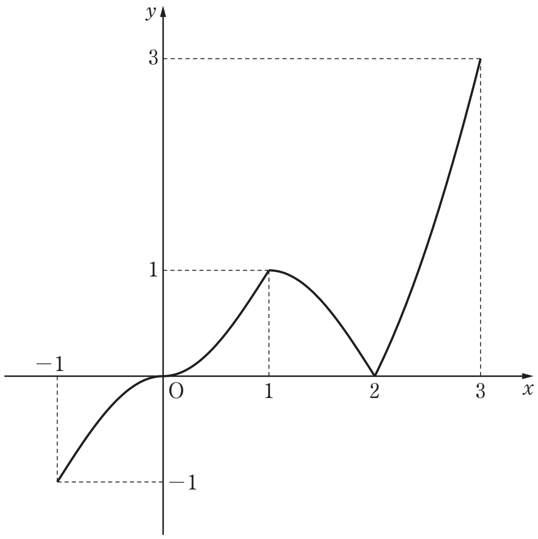
(3)　$f(x)=|x|$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ より $f(x-2)=|x-2|$ $(-1\leqq x-2\leqq 1)$，さらに周期が 2 より $f(x)=|x-2|$ $(1\leqq x\leqq 3)$ となるので

$$f(x)=\begin{cases}|x| & (-1\leqq x<1)\\ |x-2| & (1\leqq x\leqq 3)\end{cases}=\begin{cases}-x & (-1\leqq x<0)\\ x & (0\leqq x<1)\\ -x+2 & (1\leqq x<2)\\ x-2 & (2\leqq x\leqq 3)\end{cases}$$

よって

$$xf(x)=\begin{cases}-x^2 & (-1\leqq x<0)\\ x^2 & (0\leqq x<1)\\ -x(x-2) & (1\leqq x<2)\\ x(x-2) & (2\leqq x\leqq 3)\end{cases}$$

となるので，$y=xf(x)$ のグラフは下図.



(4)　$f(x)$ が周期関数で，その周期が $p(\neq 0)$ であるとすると，$f(x+p)=f(x)$ すなわち $\sin(x+p)^2=\sin x^2$ が任意の実数 x について成り立つ.

ここで $x=0$ とすると $\sin p^2=0$ となるが，$p^2\geqq 0$ で $p\neq 0$ より $p^2=k\pi$（k は自然数）となる.

また，$\sin(x+p)^2=\sin x^2$ すなわち $\sin(x+p)^2-\sin x^2=0$ であるから

$2\cos\left(x^2+px+\dfrac{p^2}{2}\right)\sin\left(px+\dfrac{p^2}{2}\right)=0$ が任意の実数 x について成り立つことになる.

$x=\dfrac{1}{2p}$ とすると，$px+\dfrac{p^2}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{p^2}{2}$，$x^2+px+\dfrac{p^2}{2}=\dfrac{1}{4p^2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{p^2}{2}$ となるが，

$\dfrac{p^2}{2}=\dfrac{k\pi}{2}$，$0<\dfrac{1}{2}<\dfrac{\pi}{6}$，$0<\dfrac{1}{4p^2}=\dfrac{1}{4k\pi}<\dfrac{1}{4}<\dfrac{\pi}{12}$ より $\dfrac{k\pi}{2}<px+\dfrac{p^2}{2}<\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}$，

$\dfrac{k\pi}{2}<x^2+px+\dfrac{p^2}{2}<\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ となるので

$$\cos\left(x^2+px+\frac{p^2}{2}\right)\sin\left(px+\frac{p^2}{2}\right)\neq 0$$

よって，$f(x)$ は周期関数ではない.

第8講　定義に従って微分

8　次の各問いに答えよ．ただし，関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は微分可能であるものとする．

(1)　自然数 n に対して $f(x)=x^n$ とおくとき，$f(x)$ を定義に従って微分せよ．

(2)　実数 α に対し，$f(x)=\alpha g(x)$ とするとき，$f'(x)=\alpha g'(x)$ であることを示せ．また，$f(x)=g(x)+h(x)$ とおくとき，$f'(x)=g'(x)+h'(x)$ であることを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ．

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^n f(x)-x^n f(a)}{x-a}$ (n は自然数) を $f(a)$ と a，及び $f'(a)$ を用いて表せ．

【答】 (1) $f'(x)=nx^{n-1}$　(2) 略　(3) $3f'(a)$　(4) $a^n f'(a)-na^{n-1}f(a)$

【解答】

(1)　$f(x)=x^n$ より

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x+(x+h)^{n-3}\cdot x^2+\cdots+(x+h)\cdot x^{n-2}+x^{n-1}\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x+(x+h)^{n-3}\cdot x^2+\cdots+(x+h)\cdot x^{n-2}+x^{n-1}\}$$

$$=\boldsymbol{nx^{n-1}}$$

(2)　$f(x)=\alpha g(x)$ のとき

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\alpha g(x+h)-\alpha g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\alpha\times\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\alpha g'(x)$$

また，$f(x)=g(x)+h(x)$ のとき

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{g(x+h)+h(x+h)\}-\{g(x)+h(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\frac{h(x+h)-h(x)}{h}\right\}$$

$$=g'(x)+h'(x)$$

(3)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$$

$$=f'(a)\times 2+f'(a)=\boldsymbol{3f'(a)}$$

(4)

$$\lim_{x\to a}\frac{a^n f(x)-x^n f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^n\{f(x)-f(a)+f(a)\}-x^n f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^n\{f(x)-f(a)\}-(x^n-a^n)f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{a^n\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})f(a)\right\}$$

$$=\boldsymbol{a^n f'(a)-na^{n-1}f(a)}$$

第９講　３次のグラフと直線など

> **9**　曲線 $C: y=x^3-3x+3$ について，次の各問いに答えよ．
>
> (1)　C 上の点 $(2,\ 5)$ における接線 l_1 の方程式を求めよ．また，C と l_1 の交点の x 座標を求めよ．
>
> (2)　点 $(2,\ -3)$ から曲線 C に引いた接線の方程式を求めよ．
>
> (3)　点 $(2,\ k)$ から曲線 C に引いた接線の本数は k の値によってどのように変化するか調べよ．
>
> (4)　点 $(2,\ 1)$ を通る傾き m の直線が，曲線 C と異なる３つの点を共有しているという．その３点を x 座標の小さい方から P，Q，R とするとき，Q が線分 PR の中点となるような m の値を求めよ．

【答】 (1) 接線 $l_1: y=9x-13$，交点の x 座標：-4　(2) $y=-3x+3$，$y=24x-51$

(3) $\begin{cases} 1 & (k<-3,\ k>5 \text{ のとき}) \\ 2 & (k=-3,\ 5 \text{ のとき}) \\ 3 & (-3<k<5 \text{ のとき}) \end{cases}$　　(4) $m=-1$

【解答】

(1)　$x=2$ において $y'=3x^2-3=9$ より，$l_1: y=9(x-2)+5$　ゆえに　$l_1:$ $\boldsymbol{y=9x-13}$

この直線と曲線 C の式を連立すると

$$x^3-3x+3=9x-13$$
$$(x-2)^2(x+4)=0$$

よって，交点の x 座標は $\boldsymbol{-4}$

(2)　接点の座標を $(t,\ t^3-3t+3)$ とおくと，接線は $y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t+3$

これが点 $(2,\ -3)$ を通るので

$$-3=(3t^2-3)(2-t)+t^3-3t+3$$
$$2t^2(t-3)=0$$
$$\therefore\quad t=0,\ 3$$

よって，$t=0$ のとき接線は $\boldsymbol{y=-3x+3}$，$t=3$ のとき接線は $\boldsymbol{y=24x-51}$

(3)　(2)と同様に，接線 $y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t+3$ が点 $(2,\ k)$ を通るので

$$k=(3t^2-3)(2-t)+t^3-3t+3$$
$$=-2t^3+6t^2-3$$

k を定数とするこの方程式の異なる実数解の個数が，接線の本数に一致する．

ここで $f(t)=-2t^3+6t^2-3$ とおくと，$f'(t)=-6t(t-2)$ より $f(t)$ の増減は

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	-3	↗	5	↘

となるので，求める接線の本数は $\begin{cases} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{(k<-3,\ k>5} \textbf{ のとき}\boldsymbol{)} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{(k=-3,\ 5} \textbf{ のとき}\boldsymbol{)} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{(-3<k<5} \textbf{ のとき}\boldsymbol{)} \end{cases}$

(4)　点 $(2,\ 1)$ を通り，傾き m の直線は $y=m(x-2)+1$ であり，この直線と曲線 C の式を連立すると

$$x^3-3x+3=m(x-2)+1$$
$$x^3-(m+3)x+2m+2=0$$

この３次方程式の実数解を小さい順に α，β，γ とすると，Q が PR の中点となるので

$$\frac{\alpha+\gamma}{2}=\beta \quad \cdots\cdots①$$

となる．

また，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \quad \cdots\cdots②$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-(m+3) \quad \cdots\cdots③$$
$$\alpha\beta\gamma=-(2m+2) \quad \cdots\cdots④$$

①と②より $\beta=0$ を得る．これと④より $\boldsymbol{m=-1}$

　このとき③より $\gamma\alpha=-2$ となるが，これと $\alpha+\gamma=0$ より $\alpha=-\sqrt{2}$，$\gamma=\sqrt{2}$ となり，$m=-1$ のとき確かに異なる３点を共有していることがわかる．

第10講　3次の接線と交点について

[10] 曲線 $C: y=x^3+2x^2+3x+4$ の $x=5$ における接線を l とする．l の方程式を求めよ．また，C と l の交点の x 座標を求めよ．

【答】 接線 $l: y=98x-296$，交点の x 座標：-12

【解答】

$x=5$ において $y'=3x^2+4x+3=3\cdot5^2+4\cdot5+3=98$，$y=5^3+2\cdot5^2+3\cdot5+4=194$ より，$x=5$ における接線は

$$y=98(x-5)+194$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{y=98x-296}$$

この直線と曲線 C の式を連立すると

$$x^3+2x^2+3x+4=98x-296$$
$$(x-5)^2(x+12)=0$$

よって，交点の x 座標は $\mathbf{-12}$

第11講　3次のグラフについて

11　次の各問いに答えよ．ただし，k は定数とする．

(1)　関数 $y=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ．

(2)　関数 $f(x)=x^3-3(k+1)x^2+12kx$ の $x\geqq 0$ における最小値を求めよ．

(3)　方程式 $x^3-3x^2=k$ が異なる3つの実数解をもち，それらの中で最小のものを α とするとき，α のとり得る値の範囲を求めよ．

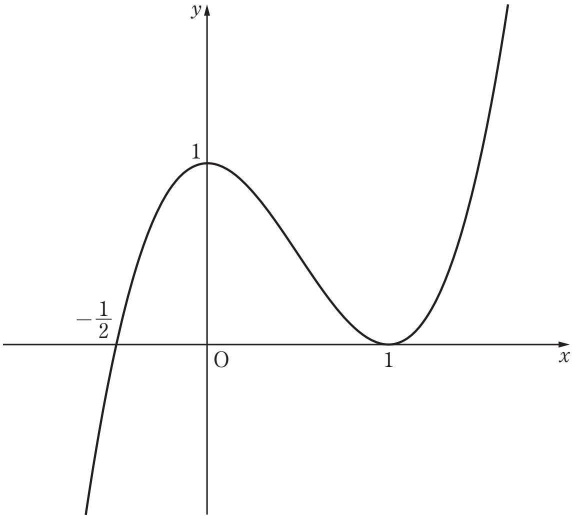
【答】 (1) 略　(2) $\begin{cases} 4k^2(3-k) & (k>3) \\ 0 & \left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq 3\right) \\ 4(3k-1) & \left(k<\dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$　(3) $-1<\alpha<0$

【解答】

(1)　$y'=6x(x-1)$ より，y の増減は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	1	↘	0	↗

となる．また，$y=(2x+1)(x-1)^2$ よりグラフは下図．



(2)　$f'(x)=3x^2-6(k+1)x+12k=3(x-2)(x-2k)$

(I)　$k>1$ のとき，$f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	2	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$f(2)$	↘	$f(2k)$	↗

となる．このとき $f(3-k)=f(2k)$ である．

(Ⅰ-i)　$3-k \geqq 0$ すなわち $1<k \leqq 3$ のとき，最小値は $f(0)=0$

(Ⅰ-ii)　$3-k<0$ すなわち $k>3$ のとき，最小値は $f(2k)=4k^2(3-k)$

(Ⅱ)　$k=1$ のとき，$f'(x)=3(x-2)^2 \geqq 0$ より $x \geqq 0$ で $f(x)$ は増加関数，よって最小値は $f(0)=0$

(Ⅲ)　$k<1$ のとき，$f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	$2k$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(2k)$	↘	$f(2)$	↗

となる．このとき $f(3k-1)=f(2)$ である．

(Ⅲ-i)　$3k-1 \geqq 0$ すなわち $\dfrac{1}{3} \leqq k<1$ のとき，最小値は $f(0)=0$

(Ⅲ-ii)　$3k-1<0$ すなわち $k<\dfrac{1}{3}$ のとき，最小値は $f(2)=4(3k-1)$

以上より，求める最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{4k^2(3-k)} & \boldsymbol{(k>3)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\left(\frac{1}{3} \leqq k \leqq 3\right)} \\ \boldsymbol{4(3k-1)} & \boldsymbol{\left(k<\frac{1}{3}\right)} \end{cases}$$

(3)　$f(x)=x^3-3x^2$ とおくと，$f'(x)=3x(x-2)$ より $f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

となるので，$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフが異なる3つの共有点をもつ条件は $-4<k<0$ となる．また，$f(-1)=-4=f(2)$ である．

この範囲で k を動かすとき，$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフの共有点の x 座標で最小のものが α であるから，α のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{-1<\alpha<0}$$

第 12 講　3 次方程式の実数解について

12 次の各問いに答えよ．ただし，実数 x に対し，x 以下の最大整数を x の整数部分とし $[x]$ で表し，このときの $x-[x]$ を x の小数部分とする．

(1) $f(x)=x^3-4x+1$ に関して，3 次方程式 $f(x)=0$ の異なる 3 つの実数解を小さい方から α，β，γ とする．α，β，γ の整数部分をそれぞれ求めよ．また，α，β，γ のうち小数部分が最小となるものはどれか．

(2) $g(x)=x^3+3x^2+mx+1$ について，3 次方程式 $g(x)=0$ の異なる実数解の個数が 3 個，2 個，1 個となる条件をそれぞれ求めよ．

【答】 (1) α，β，γ の整数部分は順に -3，0，1，小数部分が最小となるのは β

(2) $\begin{cases} 3\text{ 個となる条件は}\quad m<-\dfrac{15}{4} \\ 2\text{ 個となる条件は}\quad m=-\dfrac{15}{4} \\ 1\text{ 個となる条件は}\quad m>-\dfrac{15}{4} \end{cases}$

【解答】

(1) $f(-3)=-14<0$，$f(-2)=f(0)=f(2)=1>0$，$f(1)=-2<0$ より，

3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解は $-3<x<-2$ と $0<x<1$ と $1<x<2$ の間にそれぞれ 1 つずつ存在する．

よって α，β，γ の整数部分は順に $\boldsymbol{-3}$，$\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{1}$

また，$f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{37}{8}<0$ と $f(-2)=1>0$ より α の小数部分は 0.5 より大で，

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{8}<0$ と $f(0)=1>0$ より β の小数部分は 0.5 より小，さらに $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{13}{8}<0$ と $f(2)=1>0$ より γ の小数部分は 0.5 より大となるので，小数部分が最小となるのは $\boldsymbol{\beta}$

(2) $g(x)=x^3+3x^2+mx+1$ より，$g'(x)=3x^2+6x+m=3(x+1)^2+m-3$

(Ⅰ) $m-3\geqq 0$ すなわち $m\geqq 3$ のとき，$g'(x)\geqq 0$ より 3 次方程式 $g(x)=0$ の異なる実数解の個数は 1

(Ⅱ) $m-3<0$ すなわち $m<3$ のとき，$g'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，それらを α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと $\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=\dfrac{m}{3}$ である．

また，$g(x)=g'(x)\cdot\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{m-3}{3}(2x-1)$ より

$$\begin{aligned} g(\alpha)g(\beta)&=\frac{m-3}{3}(2\alpha-1)\cdot\frac{m-3}{3}(2\beta-1) \\ &=\frac{(m-3)^2}{9}\{4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1\} \\ &=\frac{(m-3)^2}{9}\left\{4\cdot\frac{m}{3}-2(-2)+1\right\} \\ &=\frac{(m-3)^2}{27}(4m+15) \end{aligned}$$

となるので，

$4m+15>0$ すなわち $-\frac{15}{4}<m<3$ のとき，$g(x)=0$ の異なる実数解の個数は 1

$4m+15=0$ すなわち $m=-\frac{15}{4}$ のとき，$g(x)=0$ の異なる実数解の個数は 2

$4m+15<0$ すなわち $m<-\frac{15}{4}$ のとき，$g(x)=0$ の異なる実数解の個数は 3

(Ⅰ)，(Ⅱ)より $g(x)=0$ の異なる実数解が
- **3 個となる条件は　$m<-\frac{15}{4}$**
- **2 個となる条件は　$m=-\frac{15}{4}$**
- **1 個となる条件は　$m>-\frac{15}{4}$**

第 13 講　面積以外の積分計算

13　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=-x+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(2)　$\int_a^x f(t)dt=x^3-3x^2$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．

(3)　$f(x)=\int_x^{x+1}|t(t-2)|dt$ を求めよ．

【答】 (1) $f(x)=-x+\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$　(2) $f(x)=3x^2-6x$，$a=0$，3

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2-x-\dfrac{2}{3} & (x\leqq -1,\ x\geqq 2) \\ -\dfrac{2}{3}x^3+x^2+x+\dfrac{2}{3} & (-1<x<0) \\ -x^2+x+\dfrac{2}{3} & (0\leqq x\leqq 1) \\ \dfrac{2}{3}x^3-x^2-x+2 & (1<x<2) \end{cases}$

【解答】

(1)　定数 k を用いて $\int_0^1\{f(t)\}^2dt=k$ とおくことができるので，$f(x)=-x+k$ と表せる．

このとき

$$\begin{aligned} k&=\int_0^1\{f(t)\}^2dt=\int_0^1(-t+k)^2dt \\ &=\int_0^1(t^2-2kt+k^2)dt \\ &=\left[\frac{1}{3}t^3-kt^2+k^2t\right]_0^1 \\ &=\frac{1}{3}-k+k^2 \end{aligned}$$

より，$k^2-2k+\dfrac{1}{3}=0$　　$\therefore$　$k=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$

よって　$\boldsymbol{f(x)=-x+\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}}$

(2)　与式に $x=a$ を代入して $0=a^3-3a^2$ すなわち $0=a^2(a-3)$　　$\therefore$　$\boldsymbol{a=0,\ 3}$

与式を x で微分することにより，$\boldsymbol{f(x)=3x^2-6x}$

(3)　$x\leqq -1$，$x\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_x^{x+1}(t^2-2t)dt \\ &=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_x^{x+1} \\ &=x^2-x-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$-1<x<0$ のとき

$$f(x)=\int_x^0(t^2-2t)dt+\int_0^{x+1}(-t^2+2t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_x^0+\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^{x+1}$$
$$=-\frac{2}{3}x^3+x^2+x+\frac{2}{3}$$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f(x)=\int_x^{x+1}(-t^2+2t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_x^{x+1}$$
$$=-x^2+x+\frac{2}{3}$$

$1<x<2$ のとき

$$f(x)=\int_x^2(-t^2+2t)dt+\int_2^{x+1}(t^2-2t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_x^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^{x+1}$$
$$=\frac{2}{3}x^3-x^2-x+2$$

以上より，$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2-x-\dfrac{2}{3} & (x\leqq -1,\ x\geqq 2) \\ -\dfrac{2}{3}x^3+x^2+x+\dfrac{2}{3} & (-1<x<0) \\ -x^2+x+\dfrac{2}{3} & (0\leqq x\leqq 1) \\ \dfrac{2}{3}x^3-x^2-x+2 & (1<x<2) \end{cases}}$

第14講　積分の公式について

14　α，β を実数とするとき，次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx$

(4) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m\,dx$　(m は自然数)

【答】 (1) $\dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$　(2) $-\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$　(3) $-\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$　(4) $\dfrac{1}{m+1}(\beta-\alpha)^{m+1}$

【解答】

(1) $$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta=\boldsymbol{\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3}$$

(2) $$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx&=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta=\boldsymbol{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx&=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}dx\\&=\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4-\frac{\beta-\alpha}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta=\boldsymbol{-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4}\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m\,dx&=\int_\alpha^\beta\left\{\sum_{k=0}^m {}_m\mathrm{C}_k x^{m-k}(-\alpha)^k\right\}dx\\&=\left[\sum_{k=0}^m {}_m\mathrm{C}_k\frac{(-\alpha)^k}{m-k+1}x^{m-k+1}+\frac{(-\alpha)^{m+1}}{m+1}\right]_\alpha^\beta\\&=\left[\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^m {}_{m+1}\mathrm{C}_k(-\alpha)^k x^{m-k+1}+\frac{(-\alpha)^{m+1}}{m+1}\right]_\alpha^\beta\\&=\left[\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1}\mathrm{C}_k(-\alpha)^k x^{m-k+1}\right]_\alpha^\beta\\&=\left[\frac{1}{m+1}\{x+(-\alpha)\}^{m+1}\right]_\alpha^\beta\\&=\boldsymbol{\frac{1}{m+1}(\beta-\alpha)^{m+1}}\end{aligned}$$

第 15 講　２次の面積の計算

15　次の各問いに答えよ．ただし，a，b，c，d，p，q，α，β は実数の定数とし，$\alpha<\beta$ とする．

(1)　曲線 $C_1 : y=2x^2+3x+4$ と直線 $l_1 : y=ax+b$ が 2 点で交わっていて，その x 座標が $x=5,\ 7$ であるとき，C_1 と l_1 で囲まれる部分の面積 S_1 を求めよ．

(2)　曲線 $C_2 : y=5x^2+6x+7$ と直線 $l_2 : y=cx+d$ が 1 点で接していて，その x 座標が $x=3$ であるとき，C_2 と l_2，そして直線 $x=5$ で囲まれる部分の面積 S_2 を求めよ．

(3)　曲線 $C : y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ に対し，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C に 2 本の接線が引けるとする．その接線を l，m とし，C と l の接点を $\mathrm{Q}(\alpha,\ a\alpha^2+b\alpha+c)$，$C$ と m の接点を $\mathrm{R}(\beta,\ a\beta^2+b\beta+c)$ とする．曲線 C と線分 QR で囲まれる部分の面積 S を a，α，β で表せ．また，C と l と m で囲まれる部分の面積 T を a，α，β で表せ．

【答】　(1) $S_1=\dfrac{8}{3}$　(2) $S_2=\dfrac{40}{3}$　(3) $S=\dfrac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$，$T=\dfrac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$

【解答】

(1)
$$S_1=\int_5^7\{(ax+b)-(2x^2+3x+4)\}dx$$
$$=\int_5^7(-2)(x-5)(x-7)dx$$
$$=-\frac{-2}{6}(7-5)^3=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

(2)
$$S_2=\int_3^5\{(5x^2+6x+7)-(cx+d)\}dx$$
$$=\int_3^5 5(x-3)^2dx$$
$$=\left[\frac{5}{3}(x-3)^3\right]_3^5=\mathbf{\frac{40}{3}}$$

(3)　$y=ax^2+bx+c$ より $y'=2ax+b$ となるので，Q における接線は

$y=(2a\alpha+b)(x-\alpha)+a\alpha^2+b\alpha+c$

よって　$l : y=(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c$

同様にして　$m : y=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$

ここで l と m を連立することにより $p=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を得る．

また，Q と R を通る直線の傾きは

$$\frac{(a\beta^2+b\beta+c)-(a\alpha^2+b\alpha+c)}{\beta-\alpha}=a(\alpha+\beta)+b$$

より

直線 QR : $y=\{a(\alpha+\beta)+b\}(x-\alpha)+a\alpha^2+b\alpha+c$

$y=\{a(\alpha+\beta)+b\}x-a\alpha\beta+c$

となるので

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}[\{a(\alpha+\beta)+b\}x-a\alpha\beta+c-(ax^2+bx+c)]dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(-a)(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

また

$$T=\int_{\alpha}^{p}[(ax^2+bx+c)-\{(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c\}]dx$$

$$+\int_{p}^{\beta}[(ax^2+bx+c)-\{(2a\beta+b)x-a\beta^2+c\}]dx$$

$$=\int_{\alpha}^{p}a(x-\alpha)^2dx+\int_{p}^{\beta}a(x-\beta)^2dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{p}+\left[\frac{a}{3}(x-\beta)^3\right]_{p}^{\beta}$$

$$=\frac{a}{3}(p-\alpha)^3+\frac{a}{3}(\beta-p)^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3}$$

第 16 講　群数列

16　次の各問いに答えよ．

(1)　次のように，正の偶数を順に第 n 群に n 個の偶数が入るように分けた．

$$\{2\},\ \{4,\ 6\},\ \{8,\ 10,\ 12\},\ \{14,\ 16,\ 18,\ 20\},\ \{22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 30\},\ \cdots\cdots$$

このとき，第 n 群に属している項の初項と末項，そして総和を求めよ．また，20000 は第何群に属していて，その群の中で何項目であるかを求めよ．

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=pa_n-p$ $(p\neq 1)$，$b_1=q$，$b_{n+1}=b_n+(-1)^{n+1}q$（q は自然数）で定められる数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を考える．$\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け，第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする．m を正の偶数とするとき，$\{a_n\}$ の第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ．

【答】 (1) 初項，末項，総和は順に n^2-n+2，$n(n+1)$，$n(n^2+1)$，　20000 は第 141 群の 130 項目　(2) $T_m=\dfrac{2p(p-1)q-p^{\frac{3m-4}{2}q}(p^{2q}-1)}{(p-1)^2}$

【解答】

(1)　第 $(n-1)$ 群までには

$$1+2+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)\quad 項$$

の偶数が並ぶことになるので，第 n 群における初項と末項の最初からの項数はそれぞれ

$$2\times\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}=\boldsymbol{n^2-n+2}$$

$$2\times\frac{1}{2}n(n+1)=\boldsymbol{n(n+1)}$$

となる．第 n 群の総和は，項数が n の等差数列であるので

$$\frac{n\{(n^2-n+2)+(n^2+n)\}}{2}=\boldsymbol{n(n^2+1)}$$

また，20000 が第 n 群に属しているとすると

$$n^2-n+2\leqq 20000\leqq n^2+n$$

が成り立つが，これを満たす自然数 n は

$$141^2-141+2=19742,\qquad 141^2+141=20022$$

より $n=141$ となる．ここで

$$\frac{20000-19742}{2}+1=130$$

であるから，20000 は**第 141 群の 130 項目**に現れる．

(2)　$p\neq 1$ より，漸化式 $a_{n+1}=pa_n-p$ は

$$a_{n+1}+\frac{p}{1-p}=p\left(a_n+\frac{p}{1-p}\right)$$

と変形できるので

$$a_n+\frac{p}{1-p}=\left(a_1+\frac{p}{1-p}\right)p^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{p^{n-1}-p}{1-p}$$

また階差 $b_{n+1}-b_n=(-1)^{n+1}q$ より，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}q\\&=q+\frac{q\{1-(-1)^{n-1}\}}{1-(-1)}\\&=q+\frac{q\{1-(-1)^{n-1}\}}{2}\end{aligned}$$

となり，$b_1=q$ であるから $n=1$ のときにも成り立つ．

$$\therefore\quad b_n=\begin{cases}q & (n：奇数)\\ 2q & (n：偶数)\end{cases}$$

第 $(m-1)$ 区画までの項数は

$$\begin{aligned}&q+2q+q+\cdots\cdots+q+2q+q\\&=q\times\left(\frac{m-2}{2}+1\right)+2q\times\frac{m-2}{2}\\&=\frac{(3m-4)q}{2}\end{aligned}$$

であるので，第 m 区画の初項は　$a_{\frac{(3m-4)q}{2}+1}=\dfrac{1}{1-p}p^{\frac{(3m-4)q}{2}}-\dfrac{p}{1-p}$　である．

また，T_m の項数は $2q$ である．

ここで，$\{a_n\}$ の第 R 項から先の $2q$ 個の項の和を考えると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-p}\{p^{R-1}+p^R+p^{R+1}+\cdots\cdots+p^{R+2q-1}\}-\frac{p}{1-p}\times 2q\\&=\frac{1}{1-p}\left\{\frac{p^{R-1}(1-p^{2q})}{1-p}\right\}-\frac{p}{1-p}\times 2q\end{aligned}$$

であるから，

第 m 区画の初項より $R=\dfrac{(3m-4)q}{2}+1$ と置き換えて

$$\begin{aligned}T_m&=\frac{1}{1-p}\left\{p^{\frac{(3m-4)q}{2}}\cdot\frac{1-p^{2q}}{1-p}\right\}-\frac{p}{1-p}\times 2q\\&=\boldsymbol{\frac{2p(p-1)q-p^{\frac{3m-4}{2}q}(p^{2q}-1)}{(p-1)^2}}\end{aligned}$$

第 17 講　基本漸化式 ― Part Ⅰ ―

17　次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ．

(1)　$x_{n+1}=x_n+3,\quad x_1=1$

(2)　$y_{n+1}=2y_n,\quad y_1=3$

(3)　$z_{n+1}=z_n+2^n,\quad z_1=3$

(4)　$a_{n+1}=-2a_n+1,\quad a_1=1$

(5)　$a_{n+1}=2a_n+2n-4,\quad a_1=1$

【答】 (1) $x_n=3n-2$　(2) $y_n=3\cdot 2^{n-1}$　(3) $z_n=2^n+1$　(4) $a_n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}$

(5) $a_n=2^{n-1}-2n+2$

【解答】

(1)　$x_{n+1}-x_n=3$ より，数列 $\{x_n\}$ は公差 3 の等差数列であるので

$$x_n=x_1+(n-1)\cdot 3=1+3(n-1)\qquad \therefore\quad \boldsymbol{x_n=3n-2}$$

(2)　$y_{n+1}=2y_n$ より，数列 $\{y_n\}$ は公比 2 の等比数列であるので

$$y_n=y_1\cdot 2^{n-1}\qquad \therefore\quad \boldsymbol{y_n=3\cdot 2^{n-1}}$$

(3)　$z_{n+1}-z_n=2^n$ より，数列 $\{z_n\}$ の階差数列の一般項が 2^n であるので，$n\geqq 2$ のとき

$$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\frac{2^1(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$=\boldsymbol{2^n+1}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ．

(4)　与式は　$a_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-2\left(a_n-\dfrac{1}{3}\right)$　と変形できるので

$$a_n-\frac{1}{3}=\left(a_1-\frac{1}{3}\right)\cdot(-2)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\frac{1-(-2)^n}{3}}$$

(5)　与式より　$a_{n+2}=2a_{n+1}+2(n+1)-4$　となるが，この式と与式の辺々の差をとると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+2$$

を得る．ここで $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，この式は

$$b_{n+1}=2b_n+2$$
$$b_{n+1}+2=2(b_n+2)$$

と変形できるので，これより　$b_n+2=(b_1+2)\cdot 2^{n-1}$　を得る．

ここで，$a_2=2a_1+2-4=0$ より $b_1=a_2-a_1=-1$ となるので

$$b_n=2^{n-1}-2$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k-1}-2)=1+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}-2(n-1)$$
$$=\boldsymbol{2^{n-1}-2n+2}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ．

第18講　基本漸化式 ― Part Ⅱ ―

18　次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ．

(6)　$a_{n+1}=3a_n+2^n$,　$a_1=1$

(7)　$a_{n+1}=4a_n+4^n$,　$a_1=2$

(8)　$a_{n+2}-2a_{n+1}-8a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

(9)　$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

【答】 (6) $a_n=3^n-2^n$　(7) $a_n=(n+1)4^{n-1}$　(8) $a_n=\dfrac{4^{n-1}-(-2)^{n-1}}{6}$

(9) $a_n=(n-1)2^{n-2}$

【解答】

(6)　両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{2}$　となるが，ここで $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，

この式は

$$b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}$$

$$b_{n+1}+1=\frac{3}{2}(b_n+1)$$

と変形できるので，$b_n+1=(b_1+1)\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

ここで $b_1=\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$ より

$$b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1$$

を得る．よって，$\dfrac{a_n}{2^n}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1$ より

$$\boldsymbol{a_n=3^n-2^n}$$

(7)　両辺を 4^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\dfrac{a_n}{4^n}+\dfrac{1}{4}$　となるが，ここで $b_n=\dfrac{a_n}{4^n}$ とおくと，

この式は

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{4}$$

となるので，$b_1=\dfrac{a_1}{4^1}=\dfrac{1}{2}$ より

$$b_n=b_1+(n-1)\cdot\frac{1}{4}=\frac{n+1}{4}$$

を得る．よって，$\dfrac{a_n}{4^n}=\dfrac{n+1}{4}$ より

$$\boldsymbol{a_n=(n+1)4^{n-1}}$$

(8)　与式は　$a_{n+2}+2a_{n+1}=4(a_{n+1}+2a_n)$　と変形できるので

$$a_{n+1}+2a_n=(a_2+2a_1)\cdot 4^{n-1}=4^{n-1}\quad\cdots\cdots①$$

また与式は　$a_{n+2}-4a_{n+1}=-2(a_{n+1}-4a_n)$　と変形できるので

$$a_{n+1}-4a_n=(a_2-4a_1)\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}\quad\cdots\cdots②$$

①−②より　$6a_n=4^{n-1}-(-2)^{n-1}$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\frac{4^{n-1}-(-2)^{n-1}}{6}}$$

(9)　与式は　$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$　と変形できるので

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$$

この両辺を 2^{n+1} で割り，$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと，この式は

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{4}$$

となるので，$b_n=b_1+\dfrac{1}{4}(n-1)$ より　$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{n-1}{4}$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(n-1)2^{n-2}}$$

第 19 講　漸化式は数行で解け！

19　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_{n+1}=-2a_n+1$,　$a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=2a_n+2n-4$,　$a_1=1$

(3)　$a_{n+1}=3a_n+2^n$,　$a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=4a_n+4^n$,　$a_1=2$

【答】 (1) $a_n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}$　(2) $a_n=2^{n-1}-2n+2$　(3) $a_n=3^n-2^n$　(4) $a_n=(n+1)4^{n-1}$

【解答】

(1)　与式は $a_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-2\left(a_n-\dfrac{1}{3}\right)$ と変形できるので

$$a_n-\frac{1}{3}=\left(a_1-\frac{1}{3}\right)\cdot(-2)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\frac{1-(-2)^n}{3}}$$

(2)　与式は $a_{n+1}+2(n+1)-2=2(a_n+2n-2)$ と変形できるので

$$a_n+2n-2=(a_1+2\times1-2)\cdot2^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=2^{n-1}-2n+2}$$

(3)　与式は $a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)$ と変形できるので

$$a_n+2^n=(a_1+2^1)\cdot3^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=3^n-2^n}$$

(4)　与式は $a_{n+1}-(n+1)4^n=4(a_n-n4^{n-1})$ と変形できるので

$$a_n-n4^{n-1}=(a_1-1\times4^0)\cdot4^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(n+1)4^{n-1}}$$

第 20 講　数列の和と一般項

20　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．以下の条件を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=n^3+2n^2$

(2)　$S_n=2^n+3^n$

(3)　$S_n=2a_n+n+1$

(4)　$S_n={a_n}^2+\dfrac{n}{4}$，　$a_n>0$

【答】 (1) $a_n=3n^2+n-1$　(2) $a_n=\begin{cases}2\cdot3^{n-1}+2^{n-1} & (n\geqq2)\\ 5 & (n=1)\end{cases}$　(3) $a_n=1-3\cdot2^{n-1}$

(4) $a_n=\dfrac{1}{2}n$

【解答】

(1)　$S_1=1^3+2\cdot1^2$　　$\therefore$　$a_1=3$

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(n^3+2n^2)-\{(n-1)^3+2(n-1)^2\}\\&=3n^2+n-1\end{aligned}$$

ここで $3\cdot1^2+1-1=3$ より，$\boldsymbol{a_n=3n^2+n-1}$　$(n\geqq1)$

(2)　$S_1=2^1+3^1$　　$\therefore$　$a_1=5$

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(2^n+3^n)-(2^{n-1}+3^{n-1})\\&=2\cdot3^{n-1}+2^{n-1}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a_n=\begin{cases}2\cdot3^{n-1}+2^{n-1} & (n\geqq2)\\ 5 & (n=1)\end{cases}}$

(3)　与式より得られる $S_{n+1}=2a_{n+1}+(n+1)+1$ と与式の辺々の差をとると

$$\begin{aligned}&S_{n+1}-S_n=\{2a_{n+1}+(n+1)+1\}-(2a_n+n+1)\\&a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n+1\\&a_{n+1}=2a_n-1\\&a_{n+1}-1=2(a_n-1)\end{aligned}$$

となるので，$a_n-1=(a_1-1)\cdot2^{n-1}$ となる．

ここで与式に $n=1$ を代入して $S_1=2a_1+1+1$，したがって $a_1=-2$ となるので，

$a_n-1=-3\cdot2^{n-1}$ となる．

よって，$\boldsymbol{a_n=1-3\cdot2^{n-1}}$

(4)　与式より得られる $S_{n+1}=a_{n+1}{}^2+\dfrac{n+1}{4}$ と与式の辺々の差をとると

$$S_{n+1}-S_n=\left(a_{n+1}{}^2+\frac{n+1}{4}\right)-\left(a_n{}^2+\frac{n}{4}\right)$$

$$a_{n+1}=a_{n+1}{}^2-a_n{}^2+\frac{1}{4}$$

$$\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}\right)^2=a_n{}^2$$

$$a_{n+1}=\pm a_n+\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots①$$

となる．ここで与式に $n=1$ を代入して $S_1=a_1{}^2+\dfrac{1}{4}$ すなわち $\left(a_1-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$ より，

$a_1=\dfrac{1}{2}$ を得る．

$n=k(\geqq 1)$ のとき $a_k\geqq\dfrac{1}{2}$ を仮定すると，$a_{k+1}=\pm a_k+\dfrac{1}{2}$ より $a_{k+1}=-a_k+\dfrac{1}{2}$ ならば $a_{k+1}\leqq 0$ となり $a_n>0$ に反する．また $a_{k+1}=a_k+\dfrac{1}{2}$ ならば $a_{k+1}\geqq\dfrac{1}{2}$ となり，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して $a_n\geqq\dfrac{1}{2}$ が成り立つので，①は $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2}$ となる．

ゆえに　$a_n=a_1+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{2}n}$

第21講　数学的帰納法

21　数学的帰納法を用いて，以下の式を証明せよ．ただし，n は自然数とする．

(1)　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　……①

(2)　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}\geqq\dfrac{2n}{n+1}$　……②

(3)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{5}\left(a_n+\dfrac{4}{a_n}\right)$，$a_1=\dfrac{4}{5}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ において，$a_n\geqq\dfrac{4}{5}$　……③

(4)　$n!\geqq n\cdot 2^{n-1}-n^2+n$　……④

【答】　略

【解答】

(1)　[1]　$n=1$ のとき，(左辺)$=1$，(右辺)$=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$ より①は成り立つ．

[2]　$n=k(\geqq1)$ のとき，①すなわち　$1+2+\cdots\cdots+k=\dfrac{1}{2}k(k+1)$　が成り立つと仮定すると

$$1+2+\cdots\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$
$$=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$$

より，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ．

よって，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して①は示された．

(2)　[1]　$n=1$ のとき，(左辺)$=1$，(右辺)$=\dfrac{2\cdot1}{1+1}=1$ より②は成り立つ．

[2]　$n=k(\geqq1)$ のとき，②すなわち　$1+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}\geqq\dfrac{2k}{k+1}$　が成り立つと仮定すると

$$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\geqq\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}$$
$$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}+\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$
$$>\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

より，$n=k+1$ のときにも②は成り立つ．

よって，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して②は示された．

(3)　[1]　$n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{4}{5}$ より③は成り立つ.

[2]　$n=k(\geqq 1)$ のとき，③すなわち　$a_k\geqq\dfrac{4}{5}$　が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1}-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\left(a_k+\frac{4}{a_k}\right)-\frac{4}{5}$$
$$=\frac{(a_k-2)^2}{5a_k}\geqq 0$$

より，$n=k+1$ のときにも③は成り立つ.

よって，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して③は示された.

(4)　[1]　$n=1$ のとき，(左辺)$=1!=1$，(右辺)$=1\cdot 2^0-1^2+1=1$ より④は成り立つ.

また $n=2$ のとき，(左辺)$=2!=2$，(右辺)$=2\cdot 2^1-2^2+2=2$ より④は成り立つ.

[2]　$n=k(\geqq 2)$ のとき，④すなわち　$k!\geqq k\cdot 2^{k-1}-k^2+k$　が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
&(k+1)!-\{(k+1)\cdot 2^{(k+1)-1}-(k+1)^2+(k+1)\}\\
&=(k+1)\cdot k!-\{(k+1)\cdot 2^k-(k+1)^2+(k+1)\}\\
&=(k+1)\{k!-2^k+(k+1)-1\}\\
&\geqq(k+1)\{k\cdot 2^{k-1}-k^2+k-2^k+(k+1)-1\}\\
&=(k+1)\{(k-2)\cdot 2^{k-1}-k^2+2k\}\\
&=(k+1)(k-2)(2^{k-1}-k)\\
&=(k+1)(k-2)\{({}_{k-1}C_0+{}_{k-1}C_1+{}_{k-1}C_2+\cdots\cdots+{}_{k-1}C_{k-1})-k\}\\
&\geqq(k+1)(k-2)\{({}_{k-1}C_0+{}_{k-1}C_1)-k\}\\
&=(k+1)(k-2)\{(1+k-1)-k\}\\
&=0
\end{aligned}$$

より，$n=k+1$ のときにも④は成り立つ.

よって，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して④は示された.

第22講　分点公式と平面ベクトル

22 平行四辺形OACBに関して，線分ACの中点をM，両端を除く線分OA上の点をT（つまり $\overrightarrow{OT}=\alpha\overrightarrow{OA}$ 〔$0<\alpha<1$〕とおく），線分TCと線分OMの交点をP，直線APと直線OBの交点をQ，直線APと直線BCの交点をRとする．

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{OR}$ をそれぞれ $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

(3) 点Rが点Pと点Qの中点になるときの α の値を求めよ．

【答】 (1) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{OB}$　(2) $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OR}=\dfrac{2\alpha-1}{\alpha}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

(3) $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

【解答】

OACBは平行四辺形より $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，Mは線分ACの中点より

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

(1) Pは線分TC上の点より，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=(1-t)\overrightarrow{OT}+t\overrightarrow{OC}\\&=(1-t)\alpha\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\\&=\{(1-t)\alpha+t\}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

と表せ，またPは線分OM上の点より，実数 u を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=(1-u)\overrightarrow{OO}+u\overrightarrow{OM}\\&=u\overrightarrow{OA}+\frac{u}{2}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

と表せる．よって

$$\begin{cases}(1-t)\alpha+t=u\\ t=\dfrac{u}{2}\end{cases}\qquad\therefore\quad t=\frac{\alpha}{1+\alpha},\ u=\frac{2\alpha}{1+\alpha}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{2\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{OA}+\frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{OB}}$$

(2) Qは直線AP上の点より，実数 v を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=(1-v)\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OP}\\&=\left\{(1-v)+\frac{2\alpha}{1+\alpha}v\right\}\overrightarrow{OA}+\frac{\alpha}{1+\alpha}v\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

と表せ，またQは直線OB上の点より，実数 w を用いて

$$\overrightarrow{OQ}=(1-w)\overrightarrow{OO}+w\overrightarrow{OB}=w\overrightarrow{OB}$$

と表せる．よって

$$\begin{cases} (1-v)+\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}v=0 \\ \dfrac{\alpha}{1+\alpha}v=w \end{cases} \quad \therefore \quad v=\frac{1+\alpha}{1-\alpha},\ w=\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

Rは直線 AP 上の点より，実数 x を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=(1-x)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &=\left\{(1-x)+\frac{2\alpha}{1+\alpha}x\right\}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\alpha}{1+\alpha}x\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

と表せ，またRは直線 BC 上の点より，実数 y を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=(1-y)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &=y\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

と表せる．よって

$$\begin{cases} (1-x)+\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}x=y \\ \dfrac{\alpha}{1+\alpha}x=1 \end{cases} \quad \therefore \quad x=\frac{1+\alpha}{\alpha},\ y=\frac{2\alpha-1}{\alpha}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{2\alpha-1}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

(3)　Rが線分 PQ の中点より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\\ &=\frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

となるので，これと(2)の結果より

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{1+\alpha}=\dfrac{2\alpha-1}{\alpha} \\ \dfrac{\alpha}{1-\alpha^2}=1 \end{cases} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \qquad (0<\alpha<1 \text{ より})$$

第 23 講　内積と平面ベクトル

23　三角形 ABC の外接円 O の中心を O とすると

$$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしているとする．円 O の半径を 1 とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．

(2)　三角形 ABC の面積 S を求めよ．

【答】　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(2) $\dfrac{6}{5}$

【解答】

(1)　与式より $5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}-4\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　よって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

(2)　(1)の結果より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2&=\left|-\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\\&=\frac{1}{25}(9|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+24\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+16|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2)\\&=\frac{1}{25}(9\times1^2+24\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+16\times1^2)=1+\frac{24}{25}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

となるが，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ を得る．

ここで

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=1^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+1^2\\&=2-2\left(-\frac{3}{5}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{16}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=1^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+1^2\\&=2-2\left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{4}{5}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\right)=\frac{18}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=0-\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)+1^2=\frac{12}{5}\end{aligned}$$

となるので

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}})^2}=\boldsymbol{\frac{6}{5}}$$

第24講　平面ベクトルで垂直といえば…

24　三角形OABに対して次の各問いに答えよ.

(1)　点Aから直線OBに下ろした垂線の足をHとするとき, $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ.

(2)　直線OBに関する点Aの対称点をCとする. $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ.

(3)　(2)の点Cを直線OAに関して対称移動した点をDとする. $\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ.

(4)　OPが三角形OABの外接円の直径であるとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ.

【答】　(1) $\overrightarrow{OH}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}$　(2) $\overrightarrow{OC}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

(3) $\overrightarrow{OD}=\left\{\dfrac{4(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2}-1\right\}\overrightarrow{OA}-\dfrac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}$

(4) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{|\overrightarrow{OB}|^2(|\overrightarrow{OA}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{|\overrightarrow{OA}|^2(|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}\overrightarrow{OB}$

【解答】

(1)　Hは直線OB上の点より $\overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{OB}$ (t は実数)と表せ, AH⊥OBより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}&=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}\\&=(t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}\\&=t|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\end{aligned}$$

よって

$$t=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OH}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}}$$

(2)　Hは線分ACの中点より

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\\&=\boldsymbol{\frac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}\end{aligned}$$

(3)　直線OBに関する点Aの対称点がCのとき　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$　となるので,

直線OAに関する点Cの対称点がDのときにも同様に　$\overrightarrow{OD}=\dfrac{2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$　を

得る.

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\left(\frac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$=\frac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OA}|^2$$
$$=\frac{2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}{|\overrightarrow{OB}|^2}-|\overrightarrow{OA}|^2$$

より

$$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{|\overrightarrow{OA}|^2}\left\{\frac{2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}{|\overrightarrow{OB}|^2}-|\overrightarrow{OA}|^2\right\}\overrightarrow{OA}-\left(\frac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$$
$$=\boldsymbol{\left\{\frac{4(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2}-1\right\}\overrightarrow{OA}-\frac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}}$$

(4)　$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$（$\alpha$, β は実数）と表せる．

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AP}$ より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\overrightarrow{OA}\cdot(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\alpha|\overrightarrow{OA}|^2+\beta\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OA}|^2=0$$

また $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{BP}$ より同様に

$$\alpha\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\beta|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=0$$

を得るので，これら 2 式より

$$\alpha=\frac{|\overrightarrow{OB}|^2(|\overrightarrow{OA}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2},\qquad\beta=\frac{|\overrightarrow{OA}|^2(|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{|\overrightarrow{OB}|^2(|\overrightarrow{OA}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}\overrightarrow{OA}+\frac{|\overrightarrow{OA}|^2(|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}\overrightarrow{OB}}$$

練習問題解答

第１講　２次関数の最大最小

1　関数 $f(x)=x^2+2ax+8$ の $-1\leqq x\leqq 2$ における最小値を $m(a)$ とおく．

(1)　$m(a)$ を求め，関数 $b=m(a)$ のグラフを図示せよ．

(2)　$m(a)=2$ となる a の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$m(a)=\begin{cases}-2a+9 & (a\geqq 2)\\ -a^2+8 & (-1<a<2)\\ 4a+12 & (a\leqq -1)\end{cases}$　　㋑　$m(a)=\begin{cases}4a+12 & (a\geqq 1)\\ -a^2+8 & (-2<a<1)\\ -2a+9 & (a\leqq -2)\end{cases}$

㋒　$m(a)=\begin{cases}-2a+9 & (a\geqq 1)\\ -a^2+8 & (-2<a<1)\\ 4a+12 & (a\leqq -2)\end{cases}$

(2)　㋐　$a=-\dfrac{7}{2},\ \dfrac{5}{2}$　　㋑　$a=-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}$　　㋒　$a=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}$

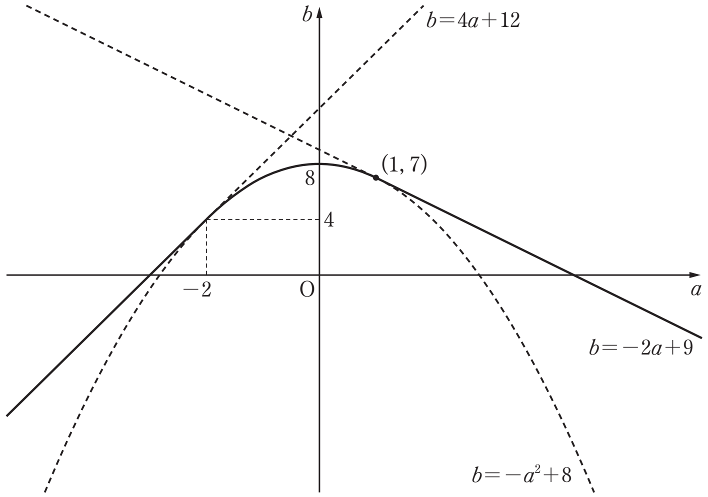
【答】　(1) ㋒　(2) ㋑

【解答】

(1)　$f(x)=(x+a)^2-a^2+8$ より

$$m(a)=\begin{cases}f(-1) & (-a\leqq -1)\\ f(-a) & (-1<-a<2)\\ f(2) & (-a\geqq 2)\end{cases}=\begin{cases}\boldsymbol{-2a+9} & \boldsymbol{(a\geqq 1)}\\ \boldsymbol{-a^2+8} & \boldsymbol{(-2<a<1)}\\ \boldsymbol{4a+12} & \boldsymbol{(a\leqq -2)}\end{cases}$$

よって，$b=m(a)$ のグラフは下図の実線部分．



(2)　(1)より，

$-2a+9=2\ (a \geqq 1)$　または　$-a^2+8=2\ (-2<a<1)$　または　$4a+12=2\ (a \leqq -2)$

すなわち，

$a=\dfrac{7}{2}$（$a \geqq 1$ を満たす）　または　$a=\pm\sqrt{6}$（$-2<a<1$ を満たさない）

または　$a=-\dfrac{5}{2}$（$a \leqq -2$ を満たす）

よって，求める a の値は　$\boldsymbol{a=-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}}$

第２講　２次方程式の解の配置

2　x の方程式 $x^2-ax+3-a=0$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　正の解と負の解を１つずつもつような実数 a の値の範囲を求めよ．

(2)　２解がともに $\dfrac{1}{2}$ 以上となるような実数 a の値の範囲を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$a \geqq 3$　　㋑　$a>3$　　㋒　$a<3$

(2)　㋐　$2<a<\dfrac{13}{6}$　　㋑　$2<a\leqq\dfrac{13}{6}$　　㋒　$2\leqq a\leqq\dfrac{13}{6}$

【答】 (1) ㋑　(2) ㋒

【解答】

(1)　$f(x)=x^2-ax+3-a$ とおくとき，$f(0)<0$ となればよいので

$f(0)=3-a<0$　ゆえに　$\boldsymbol{a>3}$

(2)　$f(x)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-a+3$ より

$$-\frac{a^2}{4}-a+3\leqq 0 \quad かつ \quad \frac{a}{2}\geqq\frac{1}{2} \quad かつ \quad f\left(\frac{1}{2}\right)\geqq 0$$

となればよい．$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{13}{4}$ より

$$(a-2)(a+6)\geqq 0 \quad かつ \quad a\geqq 1 \quad かつ \quad a\leqq\frac{13}{6}$$

ゆえに　$\boldsymbol{2\leqq a\leqq\dfrac{13}{6}}$

第3講　対数の計算

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$\log_2 2352$ の値を四捨五入して小数第2位まで求めよ．次に，$6<2^{\sqrt{7}}<7$ であることを示せ．さらに，$\dfrac{7}{5}<\log_2(\log_2 7)<\dfrac{3}{2}$ であることを示せ．

ただし，$\log_2 3=1.5850$，$\log_2 7=2.8074$ とする．

(2)　次の連立方程式が実数解をもつための a の値の範囲を示し，解を求めよ．

$$\begin{cases} 2+\log_x y-\log_x a=2\log_{x^2}(ax+3)+\log_x(x-a+1) \\ (5+3\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^{ax}=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})^y \end{cases}$$

【選択肢】

(1)　㋐　11.20　　㋑　11.22　　㋒　11.19

(2)　㋐　a の範囲：$0<a<1,\ 1<a<\dfrac{4}{3}$

$$\text{解}:x=\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0<a<1) \\ \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a<\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

㋑　a の範囲：$0<a<1,\ 1<a\leqq\dfrac{4}{3}$

$$\text{解}:x=\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0<a<1) \\ \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a\leqq\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

㋒　a の範囲：$0\leqq a<1,\ 1<a\leqq\dfrac{4}{3}$

$$\text{解}:x=\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0\leqq a<1) \\ \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a\leqq\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋑

【解答】

(1)　
$$\begin{aligned}\log_2 2352&=\log_2(2^4\cdot3\cdot7^2)\\&=4+\log_2 3+2\log_2 7\\&=4+1.5850+2\times2.8074=11.1998\end{aligned}$$

よって求める値は，**11.20**

次に

$$\log_2 6=\log_2 2+\log_2 3=2.5850$$
$$\log_2 7=2.8074$$

より

$$6=2^{2.5850},\quad 7=2^{2.8074}$$

ここで $2.6^2=6.76$, $2.7^2=7.29$ より

$$2.6<\sqrt{7}<2.7 \quad \cdots\cdots①$$

よって

$$6=2^{2.5850}<2^{2.6}<2^{\sqrt{7}}<2^{2.7}<2^{2.8074}=7$$

すなわち　$6<2^{\sqrt{7}}<7$

　また，題意より $2^{\frac{7}{5}}<\log_2 7<2^{\frac{3}{2}}$ を示せばよい．

$2^{14}=16384<16807=7^5$ であるから $2^{\frac{7}{5}}<\sqrt{7}$ となる．さらに①より $\sqrt{7}<\log_2 7$ なので

$$2^{\frac{7}{5}}<\log_2 7$$

また $(\log_2 7)^2<2.81^2=7.8961<8$ であるから

$$\log_2 7<2.81<\sqrt{8}=2^{\frac{3}{2}}$$

これより　$2^{\frac{7}{5}}<\log_2 7<2^{\frac{3}{2}}$

よって　$\dfrac{7}{5}<\log_2(\log_2 7)<\dfrac{3}{2}$

(2)　真数条件より　$y>0$, $a>0$, $ax+3>0$, $x>a-1$

また，底の条件より　$x>0$, $x\neq 1$

　この条件のもとで

$$2\log_{x^2}(ax+3)=\log_x(ax+3),\quad 2=\log_x x^2$$

より，第一式は

$$\begin{aligned}\log_x y&=\log_x(ax+3)+\log_x(x-a+1)+\log_x a-\log_x x^2\\&=\log_x\frac{a(ax+3)(x-a+1)}{x^2}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad y=\frac{a(ax+3)(x-a+1)}{x^2}$$

また，$2(5+3\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})^3$ より第二式は

$$\begin{aligned}2(5+3\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^{ax}&=(1+\sqrt{3})^y\\(1+\sqrt{3})^{ax+3}&=(1+\sqrt{3})^y\\\therefore\quad y&=ax+3\end{aligned}$$

以上より

$$\frac{a(ax+3)(x-a+1)}{x^2}=ax+3$$

$$a(x-a+1)=x^2 \quad \cdots\cdots②$$

となるので，この方程式が真数と底の条件を満たす範囲で解をもつ条件を考えればよいが，その条件は直線 $y=a(x-a+1)$ と放物線 $y=x^2$ が

$$x>0 \quad かつ \quad x>a-1 \quad かつ \quad x\neq 1$$

を満たす範囲に共有点をもつことと同じである．

また，$a=1$ とすると②より $x=0$，1 となり条件を満たさないので，$a\neq1$ である．

(Ⅰ)　$a-1<0$ すなわち $a<1$ のとき，$y=a(x-a+1)$ は傾き a，点 $(a-1,\ 0)$ を通る直線であるので，$a>0$ であればよい．

$$\boldsymbol{0<a<1}$$

(Ⅱ)　$a-1>0$ すなわち $a>1$ のとき，直線と放物線が共有点をもてばよい．

$x^2-ax+a^2-a=0$ より，判別式を D とすると

$$D=a^2-4(a^2-a)\geqq0$$

$$-3a\left(a-\frac{4}{3}\right)\geqq0$$

$$\therefore\quad 0\leqq a\leqq\frac{4}{3}$$

よって

$$\boldsymbol{1<a\leqq\frac{4}{3}}$$

(Ⅰ)，(Ⅱ)より，条件 $x>0$，$a>0$ を考えると求める解は

$$\boldsymbol{x=\begin{cases}\dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0<a<1)\\[2ex] \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a\leqq\dfrac{4}{3}\right)\end{cases}}$$

第4講　三角比といえば…

4　AB＝15，AC＝8 である △ABC の内心を P，∠C の 2 等分線と辺 AB の交点を D，∠B の 2 等分線と辺 AC の交点を E，直線 DE が辺 BC の延長線と交わる点を F とする．4 点 A，D，P，E が同一円周上にあるとき，以下の □ にあてはまる適切な数をそれぞれ答えよ．

(1)　$\angle A=\dfrac{1}{\square}(\angle B+\angle C)$ であるから，$\angle A=\square^\circ$ である．

(2)　線分 BC の長さは □ である．

(3)　線分 CF の長さは $\dfrac{\square}{\square}$ である．

(4)　線分 AE の長さは $\dfrac{\square}{\square}$ であり，線分 BP の長さは $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．

【選択肢】

(1)　㋐　$\angle A=\dfrac{1}{3}(\angle B+\angle C)$，$\angle A=45^\circ$　㋑　$\angle A=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)$，$\angle A=60^\circ$

㋒　$\angle A=\dfrac{1}{5}(\angle B+\angle C)$，$\angle A=30^\circ$

(2)　㋐　BC＝12　㋑　BC＝14　㋒　BC＝13

(3)　㋐　$CF=\dfrac{104}{7}$　㋑　$CF=\dfrac{99}{7}$　㋒　$CF=\dfrac{114}{7}$

(4)　㋐　$AE=\dfrac{36}{7}$，$BP=\dfrac{5\sqrt{26}}{3}$　㋑　$AE=\dfrac{25}{7}$，$BP=\dfrac{5\sqrt{13}}{3}$

㋒　$AE=\dfrac{30}{7}$，$BP=\dfrac{5\sqrt{39}}{3}$

【答】 (1) ㋑　(2) ㋒　(3) ㋐　(4) ㋒

【解答】

(1)　四角形 ADPE は円に内接しているので，∠EPC＝∠A

また，△PBC において 1 つの外角はそれと隣り合わない内角の和に等しいので

$$\angle A=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{\mathbf{2}}(\angle B+\angle C)$$

ここで ∠A＋∠B＋∠C＝180° より，3∠A＝180°

$$\therefore\quad \angle A=\mathbf{60}^\circ$$

(2)　△ABC において，余弦定理より

$$BC^2=15^2+8^2-2\cdot 15\cdot 8\cdot\cos 60^\circ=169$$

$$\therefore\quad BC=\mathbf{13}$$

(3)　メネラウスの定理より

$$\frac{CF}{BF}\cdot\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BD}{AD}=1 \quad よって \quad \frac{CF}{13+CF}\cdot\frac{15}{13}\cdot\frac{13}{8}=1$$

$$\left(\frac{13}{CF}+1\right)\cdot\frac{8}{15}=1$$

$$\therefore \quad CF=\mathbf{\frac{104}{7}}$$

(4)　$AE=8\times\frac{15}{15+13}=\mathbf{\frac{30}{7}}$

$$BE^2=AB^2+AE^2-2\cdot AB\cdot AE\cdot\cos 60^\circ$$

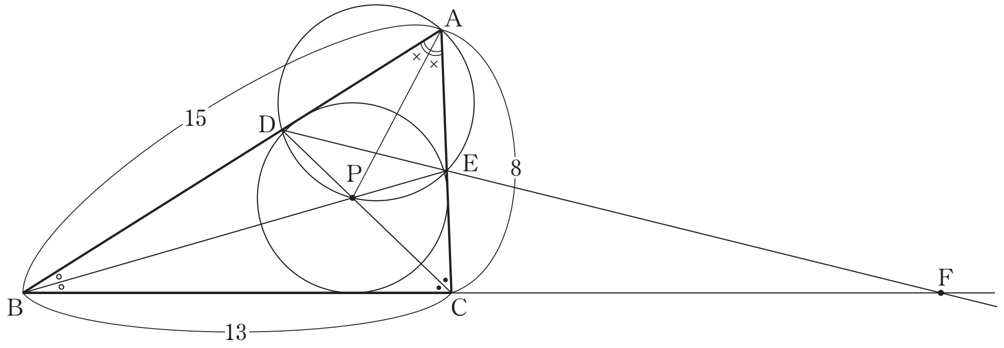
$$=15^2+\frac{30^2}{7^2}-2\cdot 15\cdot\frac{30}{7}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{15^2\cdot 39}{7^2}$$

$$\therefore \quad BE=\frac{15\sqrt{39}}{7}$$

$BP:PE=AB:AE=15:\frac{30}{7}=7:2$　より

$$BP=\frac{7}{9}BE=\mathbf{\frac{5\sqrt{39}}{3}}$$



第5講　三角関数の公式の導き方

5　$\cos\theta = x$ とするとき，次の各式を x の整式として表せ.

(1)　$\cos 4\theta$

(2)　$\cos 5\theta$

(3)　$\cos 6\theta$

(4)　$\cos 9\theta$

【選択肢】

(1)　㋐　$8x^4-8x^2+1$　㋑　$8x^4+8x^2+1$　㋒　$8x^4-8x^2-1$

(2)　㋐　$16x^5-20x^3-5x$　㋑　$16x^5-20x^3+5x$　㋒　$16x^5+20x^3+5x$

(3)　㋐　$32x^6-48x^4+18x^2-1$　㋑　$32x^6-48x^4+18x^2+1$

㋒　$32x^6-48x^4-18x^2-1$

(4)　㋐　$256x^9-576x^7+432x^5-120x^3-9x$

㋑　$256x^9-576x^7-432x^5-120x^3+9x$

㋒　$256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋑　(3) ㋐　(4) ㋒

【解答】

(1)　$\cos 4\theta = \cos 2(2\theta) = 2\cos^2 2\theta - 1$

$= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1$

$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

$= \mathbf{8x^4 - 8x^2 + 1}$

(2)　$\cos 5\theta = \cos(4\theta + \theta) = \cos 4\theta\cos\theta - \sin 4\theta\sin\theta$

$= (8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1)\cos\theta - 2\sin 2\theta\cos 2\theta\sin\theta$

$= (8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1)\cos\theta - 2(2\sin\theta\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1)\sin\theta$

$= (8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1)\cos\theta - 4(1 - \cos^2\theta)(2\cos^2\theta - 1)\cos\theta$

$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

$= \mathbf{16x^5 - 20x^3 + 5x}$

(3)　$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より

$\cos 6\theta = \cos 2(3\theta) = 2\cos^2 3\theta - 1$

$= 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)^2 - 1$

$= 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$

$= \mathbf{32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1}$

(4)　$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より

$\cos 9\theta = \cos 3(3\theta) = 4\cos^3 3\theta - 3\cos 3\theta$

$= 4(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)^3 - 3(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$= 256\cos^9\theta - 576\cos^7\theta + 432\cos^5\theta - 120\cos^3\theta + 9\cos\theta$

$= \mathbf{256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x}$

第６講　三角関数の合成（基本編）

6　$0 \leqq x < 2\pi$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x) = 2 + \sin 2x - \sin x - \cos x$ とする．このとき $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(2)　$g(x) = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + 5\cos^2 x$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　最大値 1，最小値 $\dfrac{3}{4}$　　㋑　最大値 $3+\sqrt{2}$，最小値 $\dfrac{3}{4}$

　　㋒　最大値 $3+\sqrt{2}$，最小値 $3-\sqrt{2}$

(2)　㋐　最大値 $3+\sqrt{5}$，最小値 $3-\sqrt{5}$　　㋑　最大値 5，最小値 2

　　㋒　最大値 $3+\sqrt{3}$，最小値 $3-\sqrt{3}$

【答】　(1) ㋑　(2) ㋐

【解答】

(1)　$\sin x + \cos x = t$ とおくと $t = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ で，$\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$ であるので

$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ となる．

$$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x$$

より

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + \sin 2x) - (\sin x + \cos x) + 1 \\ &= t^2 - t + 1 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

よって，$t = -\sqrt{2}$ のとき最大値 $(-\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{2}) + 1 = \mathbf{3+\sqrt{2}}$，

$t = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\mathbf{\dfrac{3}{4}}$ をとる．

(2)　$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$，$\sin x\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$，$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ より

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2 \times \frac{\sin 2x}{2} + 5 \times \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \sin 2x + 2\cos 2x + 3 \\ &= \sqrt{5}\sin(2x + \alpha) + 3 \end{aligned}$$

（ただし，α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan\alpha = 2$ を満たす実数）

ここで，$\alpha \leqq 2x + \alpha < 4\pi + \alpha$ であるので，

$2x + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{2}\pi$ すなわち $x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}$，$\dfrac{5}{4}\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ のとき最大値 $\mathbf{3+\sqrt{5}}$ をとり

$2x + \alpha = \dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{2}\pi$ すなわち $x = \dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{\alpha}{2}$，$\dfrac{7}{4}\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ のとき最小値 $\mathbf{3-\sqrt{5}}$ をとる．

第７講　周期関数について…

7　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=\sin^3 x-\dfrac{3}{4}\sin x$ の基本周期が $\dfrac{2}{3}\pi$ であることを示せ．

(2)　関数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ が p を周期とする周期関数であり，さらに定数 M に対し $|f(x)|\leqq M$ $(0\leqq x\leqq p)$ を満たしていれば，すべての実数 x について $|f(x)|\leqq M$ が成り立つことを示せ．

【答】　略

【解答】

(1)　$f(x)=-\dfrac{1}{4}(3\sin x-4\sin^3 x)=-\dfrac{1}{4}\sin 3x$ である．

$$\begin{aligned} f(x+p)-f(x)&=-\frac{1}{4}\sin 3(x+p)-\left(-\frac{1}{4}\sin 3x\right)\\ &=-\frac{1}{4}\{\sin 3(x+p)-\sin 3x\}\\ &=-\frac{1}{4}\cdot 2\cos\left(3x+\frac{3p}{2}\right)\sin\frac{3p}{2}\end{aligned}$$

上記の式が，任意の x に関して恒等的に０になるような p が周期であるが，x が任意の値をとるため $\cos\left(3x+\dfrac{3p}{2}\right)$ は恒等的に０にはならない．よって

$$\sin\frac{3p}{2}=0 \quad p\neq 0 \text{ より } \frac{3p}{2}=k\pi \ (k \text{ は０以外の整数})$$

$$\therefore \quad p=\frac{2k}{3}\pi \quad (k \text{ は０以外の整数})$$

周期の中で，正の最小のものが基本周期なので，$k=1$ として基本周期は $\dfrac{2}{3}\pi$ となる．

(2)　ある実数 x_0 について

$$|f(x_0)|>M$$

であるとする．

０でない整数 k に対して

$$x+kp=x_0 \quad (0\leqq x\leqq p)$$

となる k，x が存在するが，p が周期なら $f(x+kp)=f(x)$ であるから

$$|f(x_0)|=|f(x+kp)|=|f(x)|>M$$

となり，$|f(x)|\leqq M$ に矛盾する．

よって $|f(x)|\leqq M$ $(0\leqq x\leqq p)$ ならば，すべての実数 x について $|f(x)|\leqq M$ である．

第８講　定義に従って微分

8　次の各問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ の $x=r$ における微分係数 $f'(r)$ を定義に従って求めよ．

(2)　任意の実数 x に対して微分可能な関数 $f(x)$ が $f(2x)=2f(x)$ を満たすとき，$f'(2x)=f'(x)$ であることを示せ．

【選択肢】

(1)　㋐　$f'(r)=2ar$　　㋑　$f'(r)=2ar+b$　　㋒　$f'(r)=2ax+b$

【答】 (1) ㋑　(2) 略

【解答】

(1)　$x\neq r$ のとき

$$f(x)-f(r)=(ax^2+bx+c)-(ar^2+br+c)$$
$$=a(x-r)(x+r)+b(x-r)$$
$$\frac{f(x)-f(r)}{x-r}=a(x+r)+b$$

となるので

$$f'(r)=\lim_{x\to r}\frac{f(x)-f(r)}{x-r}$$
$$=\lim_{x\to r}\{a(x+r)+b\}$$
$$=\boldsymbol{2ar+b}$$

(2)　$f(2x)=2f(x)$ より，$f(2(x+h))=2f(x+h)$ となるので

$$\frac{f(2x+2h)-f(2x)}{2h}=\frac{f(2(x+h))-f(2x)}{2h}$$
$$=\frac{2f(x+h)-2f(x)}{2h}$$
$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を得る．また

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2x+2h)-f(2x)}{2h}=f'(2x),\qquad \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

より，$f'(2x)=f'(x)$ であることが示された．

第9講　3次のグラフと直線など

9　a，b は正の実数とする．点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ と曲線 $C: y=x^2(x+1)+b$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　点Pから曲線 C へ異なる3本の接線が引けるとする．このとき，a，b の間に成り立つ不等式を求めよ．

(2)　さらに，(1)の3本の接線のうちの1本と曲線 C との接点の x 座標が $2a$ となるとする（この接線を l とする）．このとき，a，b の満たす条件を求め，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

(3)　上記の3本の接線のうち，l 以外の2本と曲線 C との接点の x 座標をそれぞれ α，β とする．$(\alpha-\beta)^2$ の最大値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$b<\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{27}$　　㋑　$b>\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{27}$　　㋒　$b\leqq\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{27}$

(2)　㋐　$b=4a^3\ \left(0<a\leqq\dfrac{1}{3}\right)$　　㋑　$b=4a^3\ \left(0<a<\dfrac{1}{3}\right)$　　㋒　$b=4a^3\ \left(a>\dfrac{1}{3}\right)$

(3)　㋐　$\dfrac{2}{15}$　　㋑　$\dfrac{4}{15}$　　㋒　$\dfrac{4}{5}$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋑　(3) ㋑

【解答】

(1)　$y=x^3+x^2+b$ より，$y'=3x^2+2x$ となるので C 上の点 $(t,\ t^2(t+1)+b)$ における C の接線は

$$y=(3t^2+2t)(x-t)+t^3+t^2+b$$

$$\therefore\quad y=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2+b$$

これが $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を通るので

$$0=(3t^2+2t)a-2t^3-t^2+b$$

$$2t^3-(3a-1)t^2-2at-b=0\quad\cdots\cdots①$$

この方程式が異なる3つの実数解をもつ．ここで

$$f(t)=2t^3-(3a-1)t^2-2at-b$$

とおくと

$$f'(t)=2\{3t^2-(3a-1)t-a\}$$

$$=2(t-a)(3t+1)$$

となり，$f(t)$ が極値をもつので $a\neq-\dfrac{1}{3}$ であり，このとき $a>0$ より $f(t)$ の増減は

t	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗		↘		↗

となるので

$$\begin{cases} \text{極大値}\quad f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{27}-b>0 & \cdots\cdots② \\ \text{極小値}\quad f(a)=-a^3-a^2-b<0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

となる．a，b は正より③は常に成り立つ．よって②より

$$\boldsymbol{b<\frac{1}{3}a+\frac{1}{27}}$$

(2)　方程式①は $t=2a$ を解にもつので

$$b=2(2a)^3-(3a-1)(2a)^2-2a\cdot 2a \qquad \therefore\quad b=4a^3$$

これを(1)の結果に代入すると

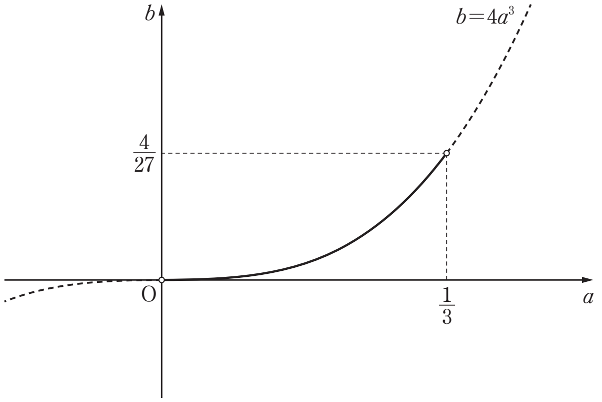
$$b<\frac{1}{3}a+\frac{1}{27}\quad \text{より}\quad 4a^3<\frac{1}{3}a+\frac{1}{27}$$

$$\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(a+\frac{1}{6}\right)^2<0$$

$$0<a<\frac{1}{3}\qquad (a>0\ \text{より})$$

よって a，b の満たす条件は　$\boldsymbol{b=4a^3}$　$\boldsymbol{\left(0<a<\dfrac{1}{3}\right)}$

点 $(a,\ b)$ の存在範囲は下図の実線部分.



(3)　$b=4a^3$ より，①は

$$2t^3-(3a-1)t^2-2at-4a^3=0$$

$$(t-2a)\{2t^2+(a+1)t+2a^2\}=0$$

したがって，α，β は $2t^2+(a+1)t+2a^2=0$ の2解であるから

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\left(-\frac{a+1}{2}\right)^2-4a^2\\&=-\frac{15}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\\&=-\frac{15}{4}\left(a-\frac{1}{15}\right)^2+\frac{4}{15}\end{aligned}$$

よって，$0<a<\dfrac{1}{3}$ の範囲で $(\alpha-\beta)^2$ は $a=\dfrac{1}{15}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{15}}$ をとる.

第 10 講　３次の接線と交点について

10　3 次関数 $f(x)=x^3+px^2+qx$ (p, q は定数) がある．$x=a$ における曲線 $y=f(x)$ の接線が接点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ 以外の点 Q で $y=f(x)$ のグラフと交わっているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 Q の x 座標 b を a と p で表せ．

(2)　$x=c$ における $y=f(x)$ の接線が点 P を通るような実数 c のうち，$c\neq a$ であるものを a と p で表せ．

(3)　$\dfrac{f'(b)-f'(a)}{f'(a)-f'(c)}$ の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$b=2a+p$　$(a\neq -p)$　　㋑　$b=-\dfrac{a+p}{2}$　$\left(a\neq -\dfrac{1}{3}p\right)$

㋒　$b=-2a-p$　$\left(a\neq -\dfrac{1}{3}p\right)$

(2)　㋐　$c=-\dfrac{a+p}{2}$　$\left(a\neq -\dfrac{1}{3}p\right)$　　㋑　$c=\dfrac{a+p}{2}$　$(a\neq p)$

㋒　$c=-2a-p$　$\left(a\neq -\dfrac{1}{3}p\right)$

(3)　㋐　2　　㋑　8　　㋒　4

【答】　(1) ㋒　(2) ㋐　(3) ㋒

【解答】

$f(x)=x^3+px^2+qx$ より $f'(x)=3x^2+2px+q$　よって，P における接線は

$$y=(3a^2+2pa+q)(x-a)+a^3+pa^2+qa$$

$$\therefore\ \ y=(3a^2+2pa+q)x-2a^3-pa^2$$

となる．

(1)　$y=f(x)$ のグラフと上記の接線との交点の x 座標は

$$x^3+px^2+qx=(3a^2+2pa+q)x-2a^3-pa^2$$

$$x^3+px^2-(3a^2+2pa)x+2a^3+pa^2=0$$

$$(x-a)^2(x+2a+p)=0$$

$$x=a,\ -2a-p$$

よって，$b=-2a-p$

題意より $a\neq b$ であるから $p\neq -3a$

$\therefore$　$\boldsymbol{b=-2a-p}$　**(ただし，**$\boldsymbol{a\neq -\dfrac{1}{3}p}$**)**

(2)　(1)を用いると　$a=-2c-p$

$a=c$ とすると $p=-3a$ であるから，

$a\neq c$ より　$\boldsymbol{c=-\dfrac{a+p}{2}}$　**(ただし，**$\boldsymbol{a\neq -\dfrac{1}{3}p}$**)**

(3)　$f'(b)-f'(a)=(3b^2+2pb+q)-(3a^2+2pa+q)$

$=3(b-a)(b+a)+2p(b-a)$

$=(b-a)\{3(b+a)+2p\}$

$=(b-a)\{3(b+a)+(-4a-2b)\}$

$=(b-a)^2$

同様に，$f'(a)-f'(c)=(a-c)^2$ となるので

$$\frac{f'(b)-f'(a)}{f'(a)-f'(c)}=\frac{(b-a)^2}{(a-c)^2}$$

$$=\frac{\{(-2a-p)-a\}^2}{\left\{a-\left(-\dfrac{a+p}{2}\right)\right\}^2}$$

$$=\frac{(-3a-p)^2}{\left(\dfrac{3a+p}{2}\right)^2}$$

$$=(-2)^2$$

$$=\mathbf{4}$$

第11講　3次のグラフについて

> 11　関数 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+(1-a^2)x$ の $0\leqq x\leqq 2$ における最大値を $f(a)$，最小値を $g(a)$ とする．$a\geqq 0$ のとき，関数 $f(a)$ と $g(a)$ について $b=f(a)$ と $b=g(a)$ のグラフをかけ．

【答】 略

【解答】

$h(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+(1-a^2)x$ とおくと

$$\begin{aligned} h'(x)&=x^2-2x+(1-a)(1+a)\\ &=(x-1+a)(x-1-a) \end{aligned}$$

(Ⅰ)　$a=0$ のとき，増減は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	0	↗		↗	$\frac{2}{3}$

となるので最大値 $\frac{2}{3}$，最小値 0

(Ⅱ)　$0<a\leqq 1$ のとき，増減は

x	0	$\cdots$	$1-a$	$\cdots$	$1+a$	$\cdots$	2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	↗		↘		↗	

となる．

$$\begin{aligned} h(1+a)&=\frac{1}{3}(1+a)^3-(1+a)^2+(1-a^2)(1+a)\\ &=\frac{1}{3}(1+a)^2\{(1+a)-3+3(1-a)\}\\ &=\frac{1}{3}(1+a)^2(1-2a) \end{aligned}$$

であるから，$0<a<\frac{1}{2}$ のとき $h(1+a)>0$ より最小値は 0，

$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき $h(1+a)\leqq 0$ より最小値は $h(1+a)=\frac{1}{3}(1+a)^2(1-2a)$

また

$$\begin{aligned} h(1-a)&=\frac{1}{3}(1-a)^3-(1-a)^2+(1-a^2)(1-a)\\ &=\frac{1}{3}(1-a)^2(1+2a) \end{aligned}$$

$$h(2)=-2a^2+\frac{2}{3}$$

より

$$h(1-a)-h(2)=\frac{1}{3}(1+a)^2(2a-1)$$

となるので，

$0<a<\frac{1}{2}$ のとき $h(1-a)<h(2)$ より最大値は $h(2)=-2a^2+\frac{2}{3}$，

$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき $h(1-a)\geqq h(2)$ より最大値は $h(1-a)=\frac{1}{3}(1-a)^2(1+2a)$

(Ⅲ)　$a>1$ のとき，増減は

x	0	$\cdots$	2
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	0	↘	

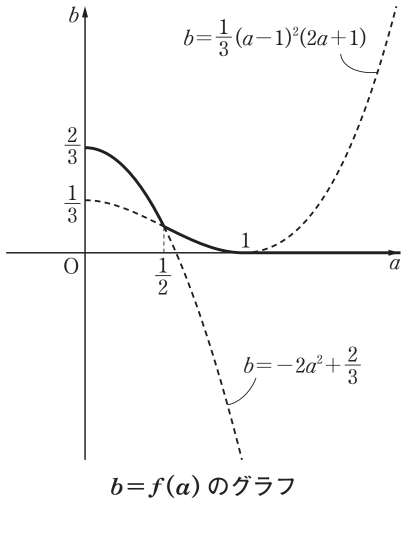
したがって最大値 0，最小値 $h(2)=-2a^2+\frac{2}{3}$

よって

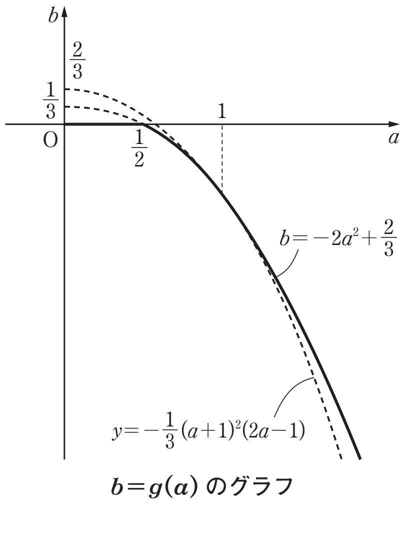
$$\text{最大値 } f(a)=\begin{cases}-2a^2+\frac{2}{3} & \left(0\leqq a<\frac{1}{2}\right)\\ \frac{1}{3}(a-1)^2(2a+1) & \left(\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1\right)\\ 0 & (a>1)\end{cases}$$

$$\text{最小値 } g(a)=\begin{cases}0 & \left(0\leqq a<\frac{1}{2}\right)\\ -\frac{1}{3}(a+1)^2(2a-1) & \left(\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1\right)\\ -2a^2+\frac{2}{3} & (a>1)\end{cases}$$

ゆえに $f(a)$ と $g(a)$ のグラフは下図の実線.



$b=f(a)$ のグラフ



$b=g(a)$ のグラフ

第 12 講　3 次方程式の実数解について

12　$f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$ とする．方程式 $f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもち，その中で正であるものはただ 1 つであることを示せ．また，その解を α とするとき，α の小数第 1 位の数を求めよ．

【選択肢】　㋐　6　　㋑　7　　㋒　8

【答】　㋐

【解答】

$f'(x)=24x^2+8x-4=4(6x^2+2x-1)$ より，$f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{7}}{6}$	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{7}}{6}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

この増減と

$$\frac{-1-\sqrt{7}}{6}<-\frac{1}{2}<0<\frac{-1+\sqrt{7}}{6} \quad \text{および} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=1>0,\ f(0)=-1<0$$

から

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{6}\right)>0, \quad f\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right)<0$$

よって，$f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもち，その中で正の解は 1 つだけであることが示された．

また $f(x)=4x(2x^2+x-1)-1$ より

$$f(0.6)=2.4(0.72+0.6-1)-1=-0.232<0$$
$$f(0.7)=2.8(0.98+0.7-1)-1=0.904>0$$

であるので，$f(x)=0$ の正の解は 0.6 と 0.7 の間にある．

よって，α の小数第 1 位は **6**

第 13 講　面積以外の積分計算

13　次の各問いに答えよ．

(1)　a を正の定数とする．

$$f(x)=ax+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$$

を満たす関数 $f(x)$ がただ１つしか存在しないように定数 a の値を定めよ．また，そのときの $f(x)$ を求めよ．

(2)　関数 $f(t)=\int_t^{t+1}|x^2-1|dx$ の値を最小にする t の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$a=-3+2\sqrt{3}$，$f(x)=(-3+2\sqrt{3})x+2-\sqrt{3}$

㋑　$a=3-2\sqrt{3}$，$f(x)=(3-2\sqrt{3})x-2+\sqrt{3}$

㋒　$a=-3-2\sqrt{3}$，$f(x)=-(3+2\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}$

(2)　㋐　$t=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$　　㋑　$t=\dfrac{-1\pm2\sqrt{3}}{2}$　　㋒　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋒

【解答】

(1)　定数 k を用いて $k=\int_0^1\{f(t)\}^2dt$ とおくと

$$f(x)=ax+k$$

と表せるので

$$k=\int_0^1(at+k)^2dt=\left[\frac{1}{3a}(at+k)^3\right]_0^1=\frac{1}{3a}\{(a+k)^3-k^3\}$$

$$\therefore\quad 3ak=a^3+3a^2k+3ak^2$$

$$3k^2+3(a-1)k+a^2=0\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$f(x)$ がただ１つだけ存在するには①の実数解 k は重解であればよいので，判別式より

$$9(a-1)^2-12a^2=0$$

$$a^2+6a-3=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=-3+2\sqrt{3}}\qquad (a>0\text{ より})$$

このときの重解 k は

$$k=-\frac{a-1}{2}=2-\sqrt{3}$$

となるので

$$\boldsymbol{f(x)=(-3+2\sqrt{3})x+2-\sqrt{3}}$$

(2) (Ⅰ)　$t \leqq -2$ のとき

$$f(t)=\int_{t}^{t+1}(x^2-1)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{t}^{t+1}=t^2+t-\frac{2}{3}$$

より，$f'(t)=2t+1<0$ すなわち $f(t)$ は単調減少．

よって $t \leqq -2$ のとき $f(-2) \leqq f(t)$

(Ⅱ)　$-2<t \leqq -1$ のとき

$$f(t)=\int_{t}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{t+1}(-x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{t}^{-1}+\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{t+1}=-\frac{2}{3}t^3-t^2+t+2$$

より，$f'(t)=-2t^2-2t+1$ となるので，$f(t)$ の増減は

t	-2	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	-1
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

となる．よって $-2<t \leqq -1$ のとき $f\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \leqq f(t)$

これより　$f\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)<f(-2)$，$f\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)<f(-1)$

(Ⅲ)　$-1<t \leqq -\frac{1}{2}$ のとき

$$f(t)=\int_{t}^{t+1}(-x^2+1)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{t}^{t+1}=-t^2-t+\frac{2}{3}$$

より，$f'(t)=-2t-1 \geqq 0$ すなわち $f(t)$ は単調増加．

よって $-1<t \leqq -\frac{1}{2}$ のとき $f(-1)<f(t)$

(Ⅰ)〜(Ⅲ)より，$t \leqq -\frac{1}{2}$ のとき $f(t)$ は $t=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ において最小となる．

$y=|x^2-1|$ のグラフは y 軸に関して対称であるので，$y=f(t)$ のグラフは直線 $t=-\frac{1}{2}$ に関して対称となる．したがって

$$t+1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\quad すなわち \quad t=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

のときにも最小となる．よって，求める t の値は

$$\boldsymbol{t=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}}$$

第14講　積分の公式について

14　α，β，γ を実数とするとき，次の定積分を計算せよ．

（1）$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx$

（2）$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx$

【選択肢】

（1）㋐ $\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(\alpha+\beta-2\gamma)$　㋑ $\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(2\gamma-\alpha-\beta)$

㋒ $\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^2(2\gamma-\alpha-\beta)^2$

（2）㋐ $\dfrac{2}{15}(\beta-\alpha)^5$　㋑ $\dfrac{1}{15}(\beta-\alpha)^5$　㋒ $\dfrac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$

【答】（1）㋑　（2）㋒

【解答】

（1）$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^3-(\beta+\gamma-2\alpha)(x-\alpha)^2+(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4-\frac{\beta+\gamma-2\alpha}{3}(x-\alpha)^3+\frac{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}{2}(x-\alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(2\gamma-\alpha-\beta)}$$

（2）$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}(x-\alpha)^5-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^4+\frac{(\beta-\alpha)^2}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5}$$

第 15 講　2 次の面積の計算

15　次の各問いに答えよ．

(1)　放物線 $y=x^2$ の上を動く 2 点 P，Q があって，この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき，PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ．

(2)　2 次関数 $y=x^2$ のグラフを Γ とする．$b<a^2$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から Γ へ接線を 2 本引き，接点を A，B とする．Γ と 2 本の線分 PA，PB で囲まれた図形の面積が $\dfrac{2}{3}$ になるような点 P の軌跡を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$y=x^2-\sqrt[3]{\dfrac{9}{16}}$　　㋑　$y=x^2+\dfrac{3}{4}$　　㋒　$y=x^2+\sqrt[3]{\dfrac{9}{16}}$

(2)　㋐　放物線 $y=x^2-1$　　㋑　放物線 $y=x^2+1$　　㋒　放物線 $y=x^2-\dfrac{1}{4}$

【答】　(1) ㋒　(2) ㋐

【解答】

(1)　$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ とおき，直線 PQ を表す式を $y=l(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}1&=\int_\alpha^\beta\{l(x)-x^2\}dx\\&=\int_\alpha^\beta\{-(x-\alpha)(x-\beta)\}dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

$$\therefore\quad(\beta-\alpha)^3=6\quad\cdots\cdots①$$

ここで $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases}X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\[2mm]Y=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\end{cases}\quad\text{であるから}\quad\begin{cases}\alpha+\beta=2X\\(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2Y\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}\alpha+\beta=2X\\\alpha\beta=2X^2-Y\end{cases}$$

これを，①すなわち

$$\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=6$$

へ代入すると

$$\{(2X)^2-4(2X^2-Y)\}^{\frac{3}{2}}=6$$
$$\{4Y-4X^2\}^{\frac{3}{2}}=6$$
$$\therefore\quad Y=X^2+\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$$

よって，求める図形の方程式は

$$\boldsymbol{y=x^2+\sqrt[3]{\frac{9}{16}}}$$

(2)　$A(\alpha,\ \alpha^2)$ とおくと，$y'=2x$ より点 A における接線は

$$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2$$
$$\therefore\quad y=2\alpha x-\alpha^2$$

この直線が点 $P(a,\ b)$ を通るので

$$b=2\alpha\cdot a-\alpha^2$$
$$\alpha^2-2a\alpha+b=0$$
$$\therefore\quad \alpha=a\pm\sqrt{a^2-b}$$

ここで $B(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とおくと，同様に $\beta=a\pm\sqrt{a^2-b}$ を得るが，$\alpha<\beta$ より

$$\alpha=a-\sqrt{a^2-b},\qquad \beta=a+\sqrt{a^2-b}$$

となる．接点 A と B における 2 接線の交点の x 座標は

$$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2 \text{ より}\quad 2(\beta-\alpha)x=\beta^2-\alpha^2\quad \text{よって}\quad x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

となるので

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}&=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx\\&=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\\&=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

これより $(\beta-\alpha)^3=8$，また $\beta-\alpha$ は実数より $\beta-\alpha=2$

したがって　$2\sqrt{a^2-b}=2$　　$\therefore\quad a^2-b=1$

よって求める軌跡は

放物線 $y=x^2-1$

第16講　群数列

16　次の各問いに答えよ.

(1)　正の奇数の列 1, 3, 5, 7, 9, 11, … を

[1], [3, 5], [7, 9, 11], [13, ……], ……

のように, 順番に1個, 2個, 3個, … ずつのブロックに区切るものとする.

(i)　100番目のブロックの最初の数を求めよ.

(ii)　100番目のブロックに現れる100個の数の和を求めよ.

(2)　数列 $\{a_N\}$ $(N=1, 2, 3, \cdots)$ において, $\{a_1, a_2\}$ を第1区, $\{a_3, a_4, a_5\}$ を第2区, $\{a_6, a_7, a_8, a_9\}$ を第3区とし, 以下 $\{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots\cdots, a_{N+n}\}$ を第 n 区, $\{a_{N+n+1}, a_{N+n+2}, a_{N+n+3}, \cdots\cdots, a_{N+2(n+1)}\}$ を第 $(n+1)$ 区とするとき, 以下の設問に答えよ. ただし, $a_1=1$ とし, 第 n 区 $(n=1, 2, 3, \cdots)$ は公差が n の等差数列であり, $a_{N+n+1}-a_{N+n}=n+1$ を満たすものとする.

(i)　N を n で表せ.

(ii)　a_N, a_{N+n} を n で表せ.

【選択肢】

(1) (i)　㋐　10000　　㋑　9901　　㋒　9900

(ii)　㋐　1000000　　㋑　560000　　㋒　20000

(2) (i)　㋐　$N=\frac{1}{2}n(n-1)$　　㋑　$N=\frac{1}{2}n(n+1)$　　㋒　$N=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

(ii)　㋐　$a_N=\frac{1}{3}(n-1)(n^2-2n+3)$, $a_{N+n}=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$

㋑　$a_N=\frac{1}{3}(n+1)(n^2+2n+3)$, $a_{N+n}=\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$

㋒　$a_N=\frac{1}{3}n(n^2+2)$, $a_{N+n}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

【答】　(1) (i) ㋑　(ii) ㋐　(2) (i) ㋑　(ii) ㋒

【解答】

(1) (i)　100番目のブロックの最初の数は, 正の奇数の列の最初から

$$1+2+3+\cdots\cdots+99+1=\frac{1}{2}\cdot 99\cdot 100+1=4951 \text{（番目）}$$

になるので, $2\times 4951-1=$ **9901**

(ii)　100番目のブロックの最後の数は

$9901+2\times 99=10099$

となるので, 求める和は　$\frac{100(9901+10099)}{2}=$ **1000000**

(2)　(i)　第 n 区の最初の項が a_N であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$N=\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)+1$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ．

(ii)　各区内はそれぞれ等差数列，第 n 区の末項から第 $(n+1)$ 区の初項への階差は $n+1$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_N=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k+n$$
$$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+n$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n^2+2)}$$

$a_1=1$ であるから，これは $n=1$ のときにも成り立つ．よって

$$a_{N+n}=a_N+n\times n$$
$$=\frac{1}{3}n(n^2+2)+n^2$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$$

第 17 講　基本漸化式 — Part Ⅰ —

17　次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ.

(1)　$a_{n+1}=a_n-2,\quad a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=-2a_n,\quad a_1=2$

(3)　$a_{n+1}=a_n+2n,\quad a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1,\quad a_1=1$

(5)　$a_{n+1}=3a_n+4n,\quad a_1=1$

【選択肢】

(1)　㋐　$a_n=2n-1$　㋑　$a_n=-2n+1$　㋒　$a_n=-2n+3$

(2)　㋐　$a_n=(-2)^{n-1}$　㋑　$a_n=-(-2)^{n-1}+3$　㋒　$a_n=-(-2)^n$

(3)　㋐　$a_n=n^2-n+1$　㋑　$a_n=2n^2-n$　㋒　$a_n=n^2-n$

(4)　㋐　$a_n=\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　㋑　$a_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　㋒　$a_n=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(5)　㋐　$a_n=3^{n-1}-2n+2$　㋑　$a_n=3^n-2n$　㋒　$a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

【答】　(1) ㋒　(2) ㋒　(3) ㋐　(4) ㋑　(5) ㋒

【解答】

(1)　$a_{n+1}-a_n=-2$ より，数列 $\{a_n\}$ は公差 -2 の等差数列であるので

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot(-2)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=-2n+3}$$

(2)　$a_{n+1}=-2a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は公比 -2 の等比数列であるので

$$a_n=a_1(-2)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=-(-2)^n}$$

(3)　$a_{n+1}-a_n=2n$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $2n$ であるので，

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k\\&=1+\frac{(n-1)\{2+2(n-1)\}}{2}\\&=\boldsymbol{n^2-n+1}\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ.

(4)　与式は $a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$ と変形できるので

$$a_n-2=(a_1-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

(5)　与式より　$a_{n+2}=3a_{n+1}+4(n+1)$　となるが，この式と与式の辺々の差をとると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+4$$

を得る．ここで $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，この式は

$$b_{n+1}=3b_n+4$$

$$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$$

と変形できるので，これより　$b_n+2=(b_1+2)\cdot 3^{n-1}$　を得る．

ここで，$a_2=3a_1+4=7$ より $b_1=a_2-a_1=6$ となるので

$$b_n=8\cdot 3^{n-1}-2$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot 3^{k-1}-2)$$

$$=1+8\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}-2(n-1)$$

$$=\boldsymbol{4\cdot 3^{n-1}-2n-1}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ．

第18講　基本漸化式 ― Part Ⅱ ―

18　次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ．

(6)　$a_{n+1}=-2a_n+3^n$,　$a_1=1$

(7)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{2^n}$,　$a_1=2$

(8)　$a_{n+2}-a_{n+1}-2a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

(9)　$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

【選択肢】

(6)　㋐　$a_n=\dfrac{3^{n-1}+(-2)^{n-1}}{2}$　　㋑　$a_n=\dfrac{3^n-(-2)^n}{5}$　　㋒　$a_n=3^n+(-2)^n$

(7)　㋐　$a_n=\dfrac{n+1}{2^{n-1}}$　　㋑　$a_n=\dfrac{3n-1}{2^{n-1}}$　　㋒　$a_n=\dfrac{n+3}{2^n}$

(8)　㋐　$a_n=\dfrac{2^n+(-1)^n}{3}$　　㋑　$a_n=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$　　㋒　$a_n=\dfrac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}$

(9)　㋐　$a_n=n3^{n-1}$　　㋑　$a_n=(n-1)^2 3^{n-1}$　　㋒　$a_n=(n-1)3^{n-2}$

【答】　(6) ㋑　(7) ㋐　(8) ㋒　(9) ㋒

【解答】

(6)　両辺を 3^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{1}{3}$ となるが，ここで $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，

この式は

$$b_{n+1}=-\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}$$

$$b_{n+1}-\frac{1}{5}=-\frac{2}{3}\left(b_n-\frac{1}{5}\right)$$

と変形できるので，$b_n-\dfrac{1}{5}=\left(b_1-\dfrac{1}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

ここで $b_1=\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{1}{3}$ より

$$b_n=\frac{1}{5}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

を得る．よって，$\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{5}\left\{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$ より

$$\boldsymbol{a_n=\frac{3^n-(-2)^n}{5}}$$

(7)　両辺を $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ で割る，すなわち両辺に 2^{n+1} を掛けると $2^{n+1}a_{n+1}=2^na_n+2$ となるが，

ここで $b_n=2^na_n$ とおくと，この式は

$$b_{n+1}=b_n+2$$

となるので，$b_1=2a_1=4$ より

$$b_n=b_1+(n-1)\cdot 2=2(n+1)$$

を得る．よって，$2^n a_n=2(n+1)$ より

$$\boldsymbol{a_n=\frac{n+1}{2^{n-1}}}$$

(8)　与式は　$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$　と変形できるので

$$a_{n+1}+a_n=(a_2+a_1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}\quad\cdots\cdots①$$

また与式は　$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$　と変形できるので

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}\quad\cdots\cdots②$$

①－②より　$3a_n=2^{n-1}-(-1)^{n-1}$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}}$$

(9)　与式は　$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$　と変形できるので

$$a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$$

この両辺を 3^{n+1} で割り，$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと，この式は

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{9}$$

となるので，$b_n=b_1+\dfrac{1}{9}(n-1)$ より　$\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{n-1}{9}$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(n-1)3^{n-2}}$$

第 19 講　漸化式は数行で解け！

19　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_{n+1}=3a_n+2,\quad a_1=2$

(2)　$a_{n+1}=4a_n+6n+4,\quad a_1=0$

(3)　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+(-1)^n,\quad a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=-2a_n+(-2)^n,\quad a_1=3$

【選択肢】

(1)　㋐　$a_n=4\cdot 3^{n-1}-2$　　㋑　$a_n=3^{n+1}-6$　　㋒　$a_n=3^n-1$

(2)　㋐　$a_n=4^{n-1}-2n+1$　　㋑　$a_n=4^n-2n-2$　　㋒　$a_n=4^n-3n-1$

(3)　㋐　$a_n=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2(-1)^n\right\}$　　㋑　$a_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2(-1)^n$

　　㋒　$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(-1)^{n-1}$

(4)　㋐　$a_n=(n-7)(-2)^{n-2}$　　㋑　$a_n=(n+2)(-2)^{n-1}$

　　㋒　$a_n=(2n+1)(-2)^{n-1}$

【答】　(1) ㋒　(2) ㋑　(3) ㋐　(4) ㋑

【解答】

(1)　与式は $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$ と変形できるので

$$a_n+1=(a_1+1)\cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=3^n-1}$$

(2)　与式は $a_{n+1}+2(n+1)+2=4(a_n+2n+2)$ と変形できるので

$$a_n+2n+2=(a_1+2\times 1+2)\cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=4^n-2n-2}$$

(3)　与式は $a_{n+1}+\frac{2}{3}(-1)^{n+1}=\frac{1}{2}\left\{a_n+\frac{2}{3}(-1)^n\right\}$ と変形できるので

$$a_n+\frac{2}{3}(-1)^n=\left\{a_1+\frac{2}{3}(-1)^1\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2(-1)^n\right\}}$$

(4)　与式は $a_{n+1}-(n+1)(-2)^n=-2\{a_n-n(-2)^{n-1}\}$ と変形できるので

$$a_n-n(-2)^{n-1}=\{a_1-1\times(-2)^0\}\cdot(-2)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(n+2)(-2)^{n-1}}$$

第20講　数列の和と一般項

20　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，関係式 $S_n=\frac{3}{2}a_n-n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立っている．一般項 a_n を求めよ．

【選択肢】

㋐　$a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+1$　　㋑　$a_n=2^n$　　㋒　$a_n=3^n-1$

【答】　㋒

【解答】

$n=1$ のとき

$$S_1=\frac{3}{2}a_1-1 \qquad \therefore\ a_1=2$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$a_n=\left(\frac{3}{2}a_n-n\right)-\left\{\frac{3}{2}a_{n-1}-(n-1)\right\}$$
$$a_n=3a_{n-1}+2$$
$$a_n+1=3(a_{n-1}+1)$$
$$a_n+1=(a_1+1)\cdot 3^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=3^n-1$$

以上より

$$a_n=\begin{cases}3^n-1 & (n\geqq 2)\\ 2 & (n=1)\end{cases} \quad = \quad \mathbf{3^n-1}\quad (n\geqq 1)$$

第 21 講　数学的帰納法

21　自然数 n に対して，以下を数学的帰納法を用いて証明せよ．

(1)　$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$

$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\quad(n\geqq1)\qquad\cdots\cdots(*)$$

(2)　$3^n>n^2\quad(n\geqq2)$

【答】　略

【解答】

(1)　[1]　$n=1$ のとき，(左辺)$=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$，(右辺)$=\dfrac{1}{5}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=24$ より $(*)$ は成り立つ．

[2]　$n=k(\geqq1)$ のとき，$(*)$ すなわち

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\cdots+k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{5}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

が成り立つと仮定すると

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\cdots+k(k+1)(k+2)(k+3)+(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$
$$=\frac{1}{5}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)+(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$
$$=\frac{1}{5}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)$$

より，$n=k+1$ のときにも $(*)$ は成り立つことになる．

よって，数学的帰納法により $(*)$ は証明された．

(2)　[1]　$3^2=9$，$2^2=4$ より，$3^n>n^2$ は $n=2$ のとき成り立つ．

[2]　$n=k(\geqq2)$ のとき，$3^k>k^2$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}3^{k+1}-(k+1)^2&>3\cdot k^2-(k+1)^2\\&=2k^2-2k-1\\&=2k(k-1)-1>0\qquad(k\geqq2\text{ より})\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときにも $3^n>n^2$ が成り立つ．

よって，数学的帰納法により $3^n>n^2$ $(n\geqq2)$ は示された．

第 22 講　分点公式と平面ベクトル

22　三角形 OAB の 2 辺 OA，OB をそれぞれ 3：1，4：1 に内分する点を C，D とし，線分 BC と線分 AD の交点を P，線分 CD と直線 OP の交点を Q とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とおくとき，

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

【選択肢】

(1)　㋐　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$　㋑　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$　㋒　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(2)　㋐　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$　㋑　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{4}{9}\vec{b}$　㋒　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{9}\vec{b}$

【答】　(1) ㋒　(2) ㋐

【解答】

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{4}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{4}{5}\vec{b}$ である．P は線分 CB 上の点より，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3}{4}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

と表せ，また P は線分 AD 上の点より，実数 u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-u)\vec{a}+\frac{4}{5}u\vec{b}$$

と表せる．よって

$$\begin{cases}\frac{3}{4}(1-t)=1-u\\ t=\frac{4}{5}u\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}t=\frac{1}{2}\\ u=\frac{5}{8}\end{cases}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}$$

(2)　Q は線分 OP 上の点より，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}$$

と表せるが，$\vec{a}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{b}=\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{5}{8}k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

とも表せる．これが線分 CD 上の点であるので

$$\frac{1}{2}k+\frac{5}{8}k=1\qquad\therefore\quad k=\frac{8}{9}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}}$$

第23講　内積と平面ベクトル

23　三角形ABCの内部に点Pがある．$2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ を満たし，$AP=\sqrt{2}$，$BP=2$，$CP=1$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}$ を求めよ．

(2)　三角形ABCの3辺の長さと面積を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-2$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=-1$

㋑　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-1$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

㋒　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-1$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=-2$

(2)　㋐　$AB=\sqrt{10}$，$BC=CA=2\sqrt{5}$，面積5

㋑　$AB=\sqrt{10}$，$BC=CA=\sqrt{5}$，面積 $\dfrac{5}{2}$

㋒　$AB=\sqrt{5}$，$BC=CA=\sqrt{10}$，面積 $\dfrac{2}{5}$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋑

【解答】

(1)　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=p$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=q$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=r$ とすると，与式より

$$2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$

$$2|\overrightarrow{AP}|^2+p+2r=0$$

$$\therefore\quad p+2r=-4 \quad \cdots\cdots①$$

同様に

$$\begin{cases} 2p+|\overrightarrow{BP}|^2+2q=0 \\ 2r+q+2|\overrightarrow{CP}|^2=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 2p+2q=-4 & \cdots\cdots② \\ q+2r=-2 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①～③より

$$p=-2,\quad q=0,\quad r=-1$$

よって

$$\mathbf{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-2,\quad \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\quad \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=-1}$$

(2)　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP}$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP}|^2 \\ &= |\overrightarrow{AP}|^2-2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+|\overrightarrow{BP}|^2 \\ &= (\sqrt{2})^2-2\times(-2)+2^2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathbf{AB=\sqrt{10}}$$

同様に

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{BP}|^2-2\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}+|\overrightarrow{CP}|^2 \\ &= 2^2-2\times0+1^2=5 \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{CP}|^2-2\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}+|\overrightarrow{AP}|^2$$
$$=1^2-2\times(-1)+(\sqrt{2})^2=5$$
$$\therefore\quad \mathbf{BC=CA=\sqrt{5}}$$

また

$$\cos\angle APB=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{BP}|}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

同様に

$$\cos\angle BPC=0,\qquad \cos\angle CPA=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるので

$$\sin\angle APB=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \sin\angle BPC=1,\qquad \sin\angle CPA=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる．よって求める面積は

$$\frac{1}{2}\times AP\times BP\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\times BP\times CP\times 1+\frac{1}{2}\times CP\times AP\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=1+1+\frac{1}{2}$$
$$=\mathbf{\frac{5}{2}}$$

≪別解≫

（3 辺の長さは同様の計算により得る.）

$AB=\sqrt{10}$，$BC=CA=\sqrt{5}$ より　$BC:CA:AB=1:1:\sqrt{2}$

よって，三角形 ABC は AB を斜辺とする直角二等辺三角形.

ゆえに求める面積は

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\mathbf{\frac{5}{2}}$$

第 24 講　平面ベクトルで垂直といえば…

24　三角形 ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおき，さらに $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を $\vec{b}\cdot\vec{c}=m$，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ の大きさをそれぞれ $|\vec{b}|=b$，$|\vec{c}|=c$ とおく．

(1)　直線 AB に関して，点 C と対称な点を D とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をベクトル $\vec{b}$，$\vec{c}$ と実数 m，b，c を用いて表せ．

(2)　直線 AC に関して，点 B と対称な点を E とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ をベクトル $\vec{b}$，$\vec{c}$ と実数 m，b，c を用いて表せ．

(3)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が平行なとき，三角形 ABC はどのような三角形か．

【選択肢】

(1)　㋐　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2m}{b^2}\vec{b}+\vec{c}$　　㋑　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{m}{b^2}\vec{b}-\vec{c}$　　㋒　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2m}{b^2}\vec{b}-\vec{c}$

(2)　㋐　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-\left(\dfrac{2m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{2m}{c^2}+1\right)\vec{c}$　　㋑　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\left(\dfrac{2m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{2m}{c^2}+1\right)\vec{c}$

㋒　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-\left(\dfrac{m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{m}{c^2}+1\right)\vec{c}$

(3)　㋐　AB＝AC の二等辺三角形（$\angle\mathrm{A}\neq 120^\circ$）　　㋑　$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角三角形

㋒　$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角三角形または AB＝AC の二等辺三角形（$\angle\mathrm{A}\neq 120^\circ$）

【答】　(1) ㋒　(2) ㋐　(3) ㋒

【解答】

(1)　点 C から直線 AB に下ろした垂線の足を H とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{b}\quad(k\text{ は実数})$$

とおけ，AB⊥CH より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=0$$
$$\vec{b}\cdot(k\vec{b}-\vec{c})=0$$
$$k=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\dfrac{m}{b^2}\vec{b}$　と表せる．

ここで H は線分 CD の中点より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2m}{b^2}\vec{b}-\vec{c}}$$

(2)　対称性より，(1)の結果を利用して

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2m}{c^2}\vec{c}-\vec{b}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}}&=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\left(\frac{2m}{c^2}\vec{c}-\vec{b}\right)-\left(\frac{2m}{b^2}\vec{b}-\vec{c}\right)\\&=\boldsymbol{-\left(\frac{2m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\frac{2m}{c^2}+1\right)\vec{c}}\end{aligned}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる実数 $k(\neq 0)$ が存在する．

$$\begin{aligned}k\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=k(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\\&=-k\vec{b}+k\vec{c}\end{aligned}$$

となり，これと(2)の結果より

$$-k=-\left(1+\frac{2m}{b^2}\right)\quad\text{かつ}\quad k=1+\frac{2m}{c^2}$$

ゆえに

$$1+\frac{2m}{b^2}=1+\frac{2m}{c^2}$$

$$\frac{2m}{b^2}=\frac{2m}{c^2}$$

$$\frac{2m(b+c)(b-c)}{b^2c^2}=0$$

$$\therefore\quad m=0\text{ または }b=c\qquad(b>0,\ c>0\text{ より})$$

ここで，$b=c$ の場合は　$k=1+\dfrac{2m}{b^2}=1+\dfrac{2\vec{b}\cdot\vec{c}}{b^2}=1+2\cos A$　となるが，

$k\neq 0$ より $\cos A\neq -\dfrac{1}{2}$，すなわち $b=c$ の場合は $\angle\mathrm{A}\neq 120^\circ$ である．

よって三角形 ABC は，

$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角三角形または AB＝AC の二等辺三角形（$\angle\mathrm{A}\neq 120^\circ$）．

実力をつけるために…

どうしたら自転車が上手に乗れるようになるのだろうか？
補助輪を付けて練習した人もいたでしょう．何度も転んで怪我をして，それでも諦めずに乗り続けることで，上手く乗れるようになりました．自転車に３回しか乗ったことがない人と 300 回乗ったことがある人ではどちらが上手に乗れるでしょうか．その答は明白です．自転車を上手に乗れるようになる為に，競輪選手のビデオを徹底研究する人がいたとしたら，あなたはどうアドバイスしますか？
そんなものをいくら見て研究しても，実際に自転車に乗ってみないと上手にはならないとアドバイスするでしょう．

受験勉強というのは，数学に限らず，自転車を上手に乗ることに似ています．一流の学者の論文を読んだりしてもいけないわけで，実際に自分のまわりにある問題と実際に格闘してもがいて苦しんではじめて問題が上手に解けるようになるのですね．
ただ，受験勉強の場合は，自転車における補助輪に相当する，参考書や予備校，そして「スタディサプリ」など，これから実力をつけようと考えている受験生にとっての踏み台になるものが沢山あります．
それらを上手に利用して，最後は自分の力で時間の許す限り多くの問題を経験して，制限時間内でちゃんとした解答を書けるようになるまで徹底的に練習することによって，合格がより確実なものになるわけです．

以上のことを意識しながら授業を受けて，自分の及ばない所を少しでもなおしていけば，必ず数学はできるようになるはずです．

最後まで諦めずに頑張りましょう!!

堺　義明

高1・2　トップレベル数学ⅠAⅡB （後期）

目　次

第 25 講　平面ベクトルと図示
第 26 講　空間ベクトル
第 27 講　点と直線の距離
第 28 講　軌跡の求め方
第 29 講　通過領域
第 30 講　領域と最大最小問題
第 31 講　円順列やじゅず順列
第 32 講　n 人を部屋に分ける
第 33 講　最短経路
第 34 講　事象の考え方と確率
第 35 講　条件付き確率
第 36 講　相加平均と相乗平均
第 37 講　解と係数の関係
第 38 講　方程式・不等式の解
第 39 講　虚数と方程式
第 40 講　解の個数
第 41 講　複数の変数の取り扱い
第 42 講　無理数の証明
第 43 講　因数定理・剰余の定理
第 44 講　$A=BQ+R$ について
第 45 講　整数問題の攻め方　その１
第 46 講　整数問題の攻め方　その２
第 47 講　p 進法
第 48 講　必要十分条件

第 25 講　平面ベクトルと図示

25 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に関して，次の各問いに答えよ．ただし，α，β は実数，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平行ではなく，双方とも零ベクトルではないものとする．

(1) $\alpha \geqq 0$，$\beta \geqq 0$，$\alpha+\beta=1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(2) $\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta<1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(3) $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(4) $\alpha<1$，$\beta<1$，$\alpha+\beta>1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(5) $0 \leqq \beta-\alpha \leqq 1$，$1 \leqq \alpha+\beta \leqq 2$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(6) $0 \leqq \beta-\alpha \leqq 1$，$1 \leqq \alpha+\beta \leqq 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ を満たす点 P に関し，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値と最小値を求めよ．

＜ Note ＞

第 25 講　平面ベクトルと図示

25　平行四辺形 ABCD の対角線の交点を E とし，s，t，u を実数とする．点 P，Q，R は，この平行四辺形と同一平面上にあるものとする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$s+2t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ で表される点 P の存在範囲を図示せよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=u\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$ で表される点 Q の存在範囲を図示せよ．

(3)　内積 $(\overrightarrow{\mathrm{ER}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{ER}}-\overrightarrow{\mathrm{EA}})=0$ で表される点 R の存在範囲を図示せよ．

< Note >

第 26 講　空間ベクトル

26　四面体 OABC に関して，辺 OA を 2：1 に内分する点を D，辺 OB の中点を E，直線 AE と直線 BD の交点を F，線分 FC の中点を G，直線 OG と底面 ABC の交点を H とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(3)　3 点 D，E，G を通る平面と直線 AC は共有点をもつか．もたない場合にはその理由を記せ．また，共有点をもつ場合はその共有点を P として $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(4)　四面体 OABC が正四面体であるとして，点 H から 3 点 O，A，B を通る平面へ下ろした垂線の足を I とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

< Note >

第 26 講　空間ベクトル

26　次の各問いに答えよ.

(1)　正の数 a に対し，空間内の 4 点

$$O(0,\ 0,\ 0),\quad A(0,\ 0,\ 1),\quad P(2\sqrt{2}a,\ 0,\ 0),\quad Q(\sqrt{2}a,\ \sqrt{5}a,\ 1)$$

を考える．$\angle OPQ=\dfrac{\pi}{3}$ が成り立つとき，a の値を求め，点 A から 3 点 O，P，Q を通る平面に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(2)　四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点を R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする（ただし，$m>0$，$n>0$ とする）．このとき，点 P，Q，R，S が同一平面上にあるための m，n の満たす関係式を求めよ．また線分 PQ，RS の交点を G として，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

【選択肢】

(1)　㋐　$a=\dfrac{1}{3}$，$H\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{18},\ \dfrac{1}{18}\right)$　㋑　$a=2$，$H\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

㋒　$a=1$，$H\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$

(2)　㋐　$2m=n$，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$　㋑　$m=n$，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$

㋒　$m=2n$，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

< Note >

第27講　点と直線の距離

27　次の各問いに答えよ.

(1)　点 $(p,\ q)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d が

$$d=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

であることを示せ.

(2)　点 $(2,\ 4)$ から引いた円 $x^2+(y-1)^2=1$ の接線を求めよ.

(3)　円 $x^2+(y-1)^2=25$ と直線 $y=mx+5$ が2点A，Bで交わっていて $\mathrm{AB}=8$ を満たしているとき，定数 m の値を求めよ.

＜ Note ＞

第 27 講　点と直線の距離

27　次の各問いに答えよ．

(1)　円 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ と直線 $x+y+k=0$ を考える．円に直線が接するときの定数 k の値を求めよ．また $k=1$ とし，点 P が円周上を動き，点 Q が直線上を動くとき，点 P と点 Q の距離の最小値を求めよ．

(2)　座標平面上で，円 $(x-1)^2+(y-3)^2=25$ が直線 $2x-y+k=0$ から切り取る線分の長さが $4\sqrt{5}$ であるとき，定数 k の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$k=-5\pm\sqrt{10}$，最小値 $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$

㋑　$k=-5\pm\sqrt{5}$，最小値 $3\sqrt{2}-\sqrt{10}$

㋒　$k=5\pm\sqrt{10}$，最小値 $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$

(2)　㋐　$k=-6,\ 4$　㋑　$k=-4,\ 6$　㋒　$k=1\pm5\sqrt{5}$

＜ Note ＞

第28講　軌跡の求め方

28 次の各問いに答えよ．

(1) 平面上の点Pから円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の接点をA，円 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ に引いた接線の接点をBとする．PA：PB$=\sqrt{2}$：1を満たす点Pの軌跡を求めよ．

(2) 曲線 C：$y=x^2-2x$ と直線 l：$y=mx+m$ （m は定数）の異なる2つの交点をP，Qとする．線分PQの中点の軌跡を求めよ．

(3) 2直線 $mx-y-m=0$，$x+my-m=0$ の共有点Pの軌跡を求めよ．ただし，m は実数定数とする．

< Note >

第 28 講　軌跡の求め方

28　xy 平面上の y 軸に平行な直線 $x=1$ を l とする．l 上の点 P に対して次の 3 つの条件を満たす点 Q を対応させる．

(I)　原点を O とするとき，Q は直線 OP 上にある．

(II)　Q の x 座標は負である．

(III)　$|\mathrm{AB}|$ で線分 AB の長さを表すとき，$|\mathrm{OP}||\mathrm{OQ}|=1$ を満たす．

P が l 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

【選択肢】

㋐　円 $x^2+y^2\pm x=0$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

㋑　円 $x^2+y^2+x=0$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

㋒　円 $x^2+y^2-x=0$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

＜ Note ＞

第 29 講　通過領域

29　円 $C: x^2+y^2-4ax-(a^2+2)y+4a^2=0$ について，次の各問いに答えよ.

(1)　a が任意の実数値をとりながら変化するとき，円 C が通過する領域を求めよ.

(2)　a が正の値をとりながら変化するとき，円 C が通過する領域を求めよ.

(3)　a が任意の実数値をとりながら変化するとき，円 C の内部の点が通過しない領域を求めよ.

＜ Note ＞

第 29 講　通過領域

29　xy 平面上に円 C_1：$x^2+(y+2)^2=4$ と円 C_2：$(x-a)^2+y^2=1$ がある．a を任意の実数として，C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるとき，その 2 点を通る直線の通過領域を図示せよ．

＜ Note ＞

第 30 講　領域と最大最小問題

30　4つの不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad 3x+4y \leqq 35, \quad 4x+3y \leqq 35$$

で表される領域を D とし，不等式 $x^2+y^2-10x-10y+25 \leqq 0$ で表される領域を E とする．

(1)　領域 D と領域 E の共通部分を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D と領域 E の共通部分を動くとき，$4x+5y$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

(3)　点 $(x,\ y)$ が領域 D と領域 E の共通部分を動くとき，$y-ax$ の最大値を求めよ．ただし，a は実数の定数とする．

< Note >

第 30 講　領域と最大最小問題

30　次の一組の 1 次不等式

$$x+y\leqq 7,\quad x+2y\leqq 10,\quad 0\leqq x\leqq 6,\quad 0\leqq y\leqq 4$$

の表す領域を考える．

以下の［a］～［k］に当てはまる数字をそれぞれ答えよ．

(1)　この領域の中で関数 $2x+3y$ の値を最大にする点 P_1 の座標は

$(x,\ y)=($［a］, ［b］$)$ である．

(2)　この領域の中で関数 $(2-t)x+(3-t)y$ の値を最大にする点 $(x,\ y)$ の集合は，t の値を 0 から増加させることによって変化する．

$0\leqq t<$［c］のとき，関数の値を最大にする点 P_1 の座標は

$(x,\ y)=($［a］, ［b］$)$,

［c］$<t<$［d］のとき，関数の値を最大にする点 P_2 の座標は

$(x,\ y)=($［e］, ［f］$)$,

［d］$<t<$［g］のとき，関数の値を最大にする点 P_3 の座標は

$(x,\ y)=($［h］, ［i］$)$,

［g］$<t$ のとき，関数の値を最大にする点 P_4 の座標は

$(x,\ y)=($［j］, ［k］$)$

である．ただし，P_1，P_2，P_3，P_4 は相異なる点である．

【選択肢】

(1)	(a) ㋐ 6 ㋑ 4 ㋒ 2	(b) ㋐ 1 ㋑ 4 ㋒ 3
(2)	(c) ㋐ 1 ㋑ 2 ㋒ 3	(d) ㋐ 2 ㋑ 5 ㋒ 3
	(e) ㋐ 6 ㋑ 2 ㋒ 4	(f) ㋐ 4 ㋑ 3 ㋒ 1
	(g) ㋐ 4 ㋑ 3 ㋒ 7	(h) ㋐ 4 ㋑ 6 ㋒ 0
	(i) ㋐ 0 ㋑ 4 ㋒ 6	(j) ㋐ 0 ㋑ 6 ㋒ 7
	(k) ㋐ 5 ㋑ 4 ㋒ 0	

＜ Note ＞

第 31 講　円順列やじゅず順列

31　白球が 1 個，赤球が 4 個，青球が n 個用意されている．これら $n+5$ 個の球をすべて使って以下のように並べる場合，並べ方の総数を求めよ．

(1)　横 1 列に並べる場合，両端が赤で横 1 列に並べる場合，赤が隣り合わないで横 1 列に並べる場合の各場合

(2)　円形に並べる場合

(3)　ネックレス状に並べる場合

＜ Note ＞

第 31 講　円順列やじゅず順列

31　k を 2 以上の自然数とする．$2k+2$ 個の椅子が円形に並んでいる．k 人が，どの 2 人も隣り合わないように，椅子に座る場合の数を求めよ．ただし，人は区別できないものとする．

【選択肢】

㋐　k が奇数のとき $\dfrac{k-1}{2}$，k が偶数のとき $\dfrac{k+2}{2}$

㋑　k が奇数のとき $\dfrac{k+1}{2}$，k が偶数のとき $\dfrac{k+2}{2}$

㋒　k が奇数のとき $\dfrac{k-1}{2}$，k が偶数のとき $\dfrac{k}{2}$

＜ Note ＞

第32講　n 人を部屋に分ける

32　n 人を区別のつく k 部屋に分ける場合を考える．ここで，n と k は自然数で，$n \geqq k$ とする．また，各部屋には少なくとも1人以上が割り当てられるものとする．

(1)　$k=2$ のとき，分け方は何通りあるか求めよ．

(2)　$k=3$ のとき，分け方は何通りあるか求めよ．

(3)　$k=4$ のとき，分け方は何通りあるか求めよ．

(4)　$k=10$ のとき，分け方は何通りあると予想できるか．

＜ Note ＞

第32講　n 人を部屋に分ける

32　1から n までの番号をつけた n 枚のカードがある．これら n 枚のカードを A，B，C の3つの箱に分けて入れる．ただし，どの箱にも少なくとも1枚は入れるものとする．自然数 l は $2l \leqq n$ を満たすとする．$1 \leqq k \leqq l$ である各整数 k について $2k-1$ と $2k$ の番号のカードをペアと考える．いずれかの箱に少なくとも1つのペアが入る場合の数を n と l を用いて表せ．

【選択肢】

㋐　$3^n + 3 \cdot 2^n - 2^l \cdot 3^{n-l} - 3 \cdot 2^{n-l} + 3$　　㋑　$3^n - 3 \cdot 2^n - 2^l \cdot 3^{n-l} + 3 \cdot 2^{n-l} + 3$

㋒　$3^n - 3 \cdot 2^n + 2^l \cdot 3^{n-l} + 3 \cdot 2^{n-l} - 3$

< Note >

第 33 講　最短経路

33　図のような碁盤の目状の道路がある．S 地点を出発して，道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える（図 1 の太線はそのような経路の一例である）．

(1)　S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか．

(2)　S 地点から G 地点に至る経路のうち，図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか．

(3)　図 3 の a，b の 2 か所が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか．

(4)　図 4 の α，β の 2 か所が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか．

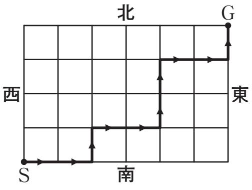


図 1

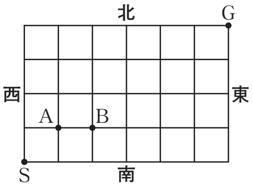


図 2

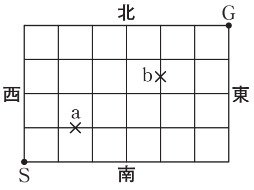


図 3

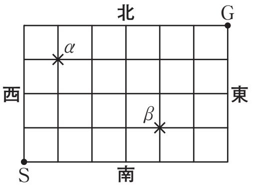


図 4

＜ Note ＞

第 33 講　最短経路

33 図 1 のような道路がある．A 地点を出発して，道路上を東または北または北東に進んで B 地点に到達する経路を考える（図 2 の太線はそのような経路の一例である）．

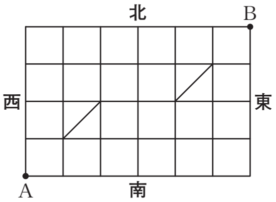


図 1

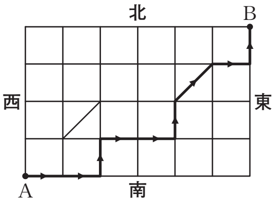


図 2

A 地点から B 地点に至る経路は何通りあるか求めよ．

【選択肢】

㋐　274 通り　　㋑　270 通り　　㋒　266 通り

< Note >

第 34 講　事象の考え方と確率

34　9 枚のカードに 1 から 9 までの数字が 1 つずつ記してある．このカードの中から任意に 1 枚を抜き出し，その数字を記録し，もとのカードの中に戻すという操作を n 回繰り返す．

(1)　記録された数の積が 5 で割り切れる確率を求めよ．

(2)　記録された数の積が 10 で割り切れる確率を求めよ．

(3)　記録された数の積が 50 で割り切れる確率を求めよ．

＜ Note ＞

第34講　事象の考え方と確率

34　9枚のカードに1から9までの数字が1つずつ記してある．このカードの中から任意に1枚を抜き出し，その数字を記録し，もとのカードの中に戻すという操作を n 回繰り返す．記録された数の積が8の倍数となる確率を求めよ．

【選択肢】

㋐　$1-\dfrac{(2n^2-13n+19)5^{n-1}}{9^n}$　㋑　$1-\dfrac{(2n^2+13n-5)5^{n-1}}{9^n}$

㋒　$1-\dfrac{(2n^2+13n+25)5^{n-2}}{9^n}$

< Note >

第 35 講　条件付き確率

35　区別のつかない 3 個の赤い球と 7 個の白い球の合計 10 個が袋の中に入っている．この袋の中から 1 個ずつ 2 回に分けて球を取り出すとき，1 回目に赤い球を取り出す事象を A，2 回目に赤い球を取り出す事象を B とする．次のそれぞれの場合において，条件付き確率 $P_A(B)$ と $P_B(A)$ を求めよ．

(1)　取り出した球はもとの袋に戻さない場合

(2)　取り出した球はもとの袋に戻す場合

(3)　取り出した球が赤の場合はもとの袋に戻し，取り出した球が白の場合はもとの袋に戻さない場合

(4)　取り出した球が白の場合はもとの袋に戻し，取り出した球が赤の場合はもとの袋に戻さない場合

＜ Note ＞

第35講　条件付き確率

35　2つのさいころAとBがあり，各面に1，2，3，4，5，6の目が書かれている．これらのさいころについて，Aのさいころの各面には1，3，4，5，6，8の目のシールを貼り，Bのさいころの各面には1，2，2，3，3，4の目のシールを貼った．

はじめに硬貨を投げ，次にAとBのさいころを同時に投げる次の試行を行う．

・硬貨を投げて表が出れば，両方のさいころのシールをすべてはがして2つのさいころを同時に投げる．

・硬貨を投げて裏が出れば，両方ともシールをはがさずに2つのさいころを同時に投げる．

この試行について，2つのさいころの目の和が3の倍数であるという条件のもとで，目の差が2以下である条件付き確率を求めよ．

ただし，シールの有無に関わらず，さいころの各面の出方は同様に確からしいとする．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{15}{44}$　㋑ $\dfrac{5}{8}$　㋒ $\dfrac{5}{12}$

＜ Note ＞

第 36 講　相加平均と相乗平均

36　次の各問いに答えよ．

(1)　x，y を正の実数とする．$(x+4y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}\right)$ の最小値を求めよ．

(2)　$x>1$ とするとき，$\dfrac{x^2+1}{x-1}$ の最小値を求めよ．

(3)　$x>-2$ とするとき，$\dfrac{x+2}{x^2+4x+8}$ の最大値を求めよ．

＜ Note ＞

第 36 講　相加平均と相乗平均

36　$x>0$ のとき，$\dfrac{x+1}{x^2+4x+12}$ の最大値を求めよ．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{5}{44}$ $(x=4$ のとき$)$　㋑ $\dfrac{2}{17}$ $(x=1$ のとき$)$　㋒ $\dfrac{1}{8}$ $(x=2$ のとき$)$

< Note >

第 37 講　解と係数の関係

37　次の各問いに答えよ．

(1)　方程式 $x^2+bx+c=0$ の 2 解を α, β とする．定数 b, c と α, β の関係式を求めよ．

(2)　方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 解を α, β, γ とする．定数 b, c, d と α, β, γ の関係式を求めよ．

(3)　方程式 $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の 4 解を α, β, γ, δ とする．定数 b, c, d, e と α, β, γ, δ の関係式を求めよ．

＜ Note ＞

第37講　解と係数の関係

37　$a+b+c=0$ のとき

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

が成立することを示せ.

< Note >

第 38 講　方程式・不等式の解

38　次の各問いに答えよ．ただし，a，b，c は実数とする．

(1)　x の方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解け．

(2)　x の方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもつ条件を求めよ．

(3)　x の不等式 $ax^2+bx+c>0$ を解け．

(4)　x の不等式 $ax^2+bx+c>0$ が実数解をもつ条件を求めよ．

＜ Note ＞

第 38 講　方程式・不等式の解

38　x の不等式 $ax^2-2a^2x+a^3+a^2-b+1\geqq 0$ が実数解をもつような a と b の条件を求めよ.

【選択肢】

㋐　$a>0$ または $b\leqq a^2+1$ $(a\leqq 0)$　　㋑　$a\geqq 0$ または $b\leqq a^2+1$ $(a<0)$

㋒　$a>0$ または $b>a^2+1$ $(a\leqq 0)$

< Note >

第 39 講　虚数と方程式

39 次の各問いに答えよ．ただし，i を虚数単位とする．

(1) p，q を実数とするとき，$p+qi=0$ は $p=q=0$ と同値であることを示せ．

(2) 実数係数の 3 次方程式 $x^3+px^2+qx-10=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，p，q の値をそれぞれ求めよ．また，他の解をすべて求めよ．

(3) x の方程式 $x^2-4ix+3-24i=0$ を解け．

＜ Note ＞

第 39 講　虚数と方程式

39　複素数 α と β を次で定める．

$$\alpha=\sqrt{5}-1+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i$$
$$\beta=-\sqrt{5}-1+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i$$

次の問いに答えよ．

(1)　α を解にもち，しかもすべての係数が実数であるような 2 次方程式を 1 つ求めよ．

(2)　α 及び β の両方を解にもち，しかもすべての係数が実数であるような 4 次方程式を 1 つ求めよ．

(3)　β^5 の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$x^2+2(\sqrt{5}-1)x+16=0$　　㋑　$x^2-2(\sqrt{5}-1)x+16=0$
　　㋒　$x^2-2(\sqrt{5}+1)x+16=0$

(2)　㋐　$x^4+4x^3+16x^2+64x+256=0$　　㋑　$x^4-2x^3+4x^2-8x+16=0$
　　㋒　$x^4-4x^3+16x^2-64x+256=0$

(3)　㋐　-2048　　㋑　1024　　㋒　2048

＜ Note ＞

第 40 講　解の個数

40　次の各問いに答えよ．ただし，k は実数定数とする．

(1)　方程式 $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-k=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(2)　方程式 $\cos^2\theta+\sin\theta-k=0$ の異なる実数解の個数を $0\leqq\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ の場合において求めよ．

＜ Note ＞

第40講　解の個数

40　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，x の方程式

$$\left|\frac{13}{4}-6\sin x-2\cos 2x\right|=k$$

の解の個数を調べよ．ただし，k は実数定数とする．

【選択肢】

㋐
$$\begin{cases} 0 & \left(k<0,\ k>\dfrac{5}{4} \text{ のとき}\right) \\ 2 & \left(k=0,\ 1 \leqq k \leqq \dfrac{5}{4} \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(0<k<\dfrac{3}{4} \text{ のとき}\right) \\ 5 & \left(k=\dfrac{3}{4} \text{ のとき}\right) \\ 6 & \left(\dfrac{3}{4}<k<1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

㋑
$$\begin{cases} 0 & \left(k<0,\ k>\dfrac{5}{4} \text{ のとき}\right) \\ 2 & \left(k=0,\ 1<k \leqq \dfrac{5}{4} \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(0<k<\dfrac{3}{4},\ k=1 \text{ のとき}\right) \\ 5 & \left(k=\dfrac{3}{4} \text{ のとき}\right) \\ 6 & \left(\dfrac{3}{4}<k<1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

㋒
$$\begin{cases} 0 & \left(k \leqq 0,\ k>\dfrac{5}{4} \text{ のとき}\right) \\ 2 & \left(1 \leqq k \leqq \dfrac{5}{4} \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(0<k<\dfrac{3}{4} \text{ のとき}\right) \\ 5 & \left(k=\dfrac{3}{4} \text{ のとき}\right) \\ 6 & \left(\dfrac{3}{4}<k<1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

< Note >

第 41 講　複数の変数の取り扱い

41　次の各問いに答えよ．

（1）$f(x,\ y)=x^2+2xy+3y^2-2x+4y+6$ の最小値を求めよ．

（2）$2x+y=3$ のとき $f(x,\ y)=x^2+2xy+3y^2$ の最小値を求めよ．

（3）$x^2+y^2=4$ のとき $f(x,\ y)=x^2+2xy+3y^2$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

（4）$x^2+2xy+3y^2=4$ のとき $f(x,\ y)=2x+y$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

（5）$x^2+2xy+3y^2=4$ のとき $f(x,\ y)=x^2+y^2$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

< Note >

第 41 講　複数の変数の取り扱い

41　$(x-1)^4+y^2=25$ のとき $f(x,\ y)=3(x-1)^2+4y$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

㋐　最大値 25〔$(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3},\ 4)$ のとき〕，
最小値 -25〔$(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3}\,i,\ -4)$ のとき〕

㋑　最大値 20〔$(x,\ y)=(1,\ 5)$ のとき〕，最小値 -20〔$(x,\ y)=(1,\ -5)$ のとき〕

㋒　最大値 25〔$(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3},\ 4)$ のとき〕，最小値 -20〔$(x,\ y)=(1,\ -5)$ のとき〕

< Note >

第 42 講　無理数の証明

42　次の各問いに答えよ.

(1)　$\sqrt{7}$ が無理数であることを示せ.

(2)　$\log_3 5$ が無理数であることを示せ.

(3)　$\sqrt[3]{5}$ が無理数であることを示せ．また，$\sqrt[3]{5}$ は有理数係数の 2 次方程式の解になれないことを示せ.

< Note >

第42講　無理数の証明

42　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ.

＜ Note ＞

第 43 講　因数定理・剰余の定理

43　x の整式 $f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りが $2x-3$，$(x-1)^2$ で割ったときの余りが $2x+1$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りが $f(\alpha)$ となることを示せ．

(2)　$f(x)$ を $x-1$，$x-2$，$x-3$ で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．

(3)　$f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ．

(4)　$f(x)$ を $(x-1)^2(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ．

＜ Note ＞

第 43 講　因数定理・剰余の定理

43　x の整式 $f(x)$ を x^3+1 で割ったときの余りが x^2+x+3，x^3-1 で割ったときの余りが $2x+1$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を x^2-x+1 で割ったときの余りを求めよ．

(2)　$f(x)$ を $(x-1)(x^2-x+1)$ で割ったときの余りを求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$x+1$　　㋑　$2x+2$　　㋒　$2x-1$

(2)　㋐　x^2-3x+2　　㋑　x^2+2x+3　　㋒　$-x^2+3x+1$

< Note >

第 44 講　$A=BQ+R$ について

44　次の各問いに答えよ．

(1)　$\{(x+1)(x-2)(x^2-x+2)\}^2$ を x^3+1 で割ったときの余りを求めよ．

(2)　$m,\ n$ を正の整数とするとき，$x^{3m}+1$ を x^3-1 で割ったときの余りを求めよ．また，x^n+1 を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ．

(3)　$f(x)=x^n$（n は自然数）とする．$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ．

(4)　$f(x)=x^n$（n は自然数）とする．$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ったときの余りを求めよ．また，$(x-2)^3$ で割ったときの余りを求めよ．

＜ Note ＞

第44講　$A=BQ+R$ について

44　$\{(x+1)(x+2)(x+3)\}^{10}$ を $(x+2)^{12}$ で割ったときの余りを求めよ.

【選択肢】

㋐　$(x+2)^9$　㋑　$(x+2)^{10}$　㋒　$(x+2)^{11}$

< Note >

第 45 講　整数問題の攻め方 その１

45　変数はすべて整数として，次の各問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$，$0<x\leqq y$ を満たす x，y をすべて求めよ．

(2)　$\sqrt{n^2-12n+180}$ が自然数となるような n をすべて求めよ．

(3)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ を満たす x，y，z をすべて求めよ．

＜ Note ＞

第 45 講　整数問題の攻め方 その 1

45　a，b，c，d を自然数として，$abcd=a+b+c+d$ かつ $a \leqq b \leqq c \leqq d$ を満たすものを求めよ．

【選択肢】

㋐　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)$　　㋑　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 2,\ 4)$

㋒　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 4,\ 4)$

< Note >

第46講　整数問題の攻め方 その2

46　次の各問いに答えよ．

(1)　a，b，q，r を整数とし

$$a=bq+r,\quad b>0,\quad 0\leqq r<b$$

を満たしているとする．このとき a，b の最大公約数 G_1 と b，r の最大公約数 G_2 は等しいことを示せ．また，このことを用いて，3718 と 4914 の最大公約数を求めよ．

(2)　$12x+5y=2199$ を満たす整数 x，y をすべて求めよ．

(3)　2つの集合 $A=\{3m+5n \mid m$ と n は整数$\}$，$B=\{2k+7l \mid k$ と l は整数$\}$ について，$A=B$ であることを示せ．

< Note >

第 46 講　整数問題の攻め方 その 2

46 次の各問いに答えよ.

(1) $6a+21b=2001$ を満たす整数 a, b の組の中で, a と b の差の絶対値が最小になるような a の値を求めよ.

(2) 9 で割り切れる整数全体の集合を A, 15 で割り切れる整数全体の集合を B とする. $C=\{x+y \mid x\in A,\ y\in B\}$ とするとき, C は 3 で割り切れる整数全体の集合と一致することを示せ.

【選択肢】

(1) ㋐ $a=81$　㋑ $a=53$　㋒ $a=71$

＜ Note ＞

第47講　p 進法

47　10 進法で「10」と表される数を 2 進法では「1010」と表すことができるが，10 進法での「1010」と区別するため，10 進法以外は添字をつけて表す場合が多い．例えば，10 進法で「10」は 2 進法では「$1010_{(2)}$」，5 進法では「$20_{(5)}$」という具合に表現できる．

(1)　$10101_{(2)}$ を 3 進法で表せ．

(2)　$123_{(4)}+301_{(4)}$，$123_{(4)}\times 301_{(4)}$，$123_{(4)}-301_{(4)}$ を計算せよ．

(3)　5 進法で表したとき 3 桁のある数は，3 つある各位の数字の 2 つが入れ替わったところ，もとの数の 2 倍になったという．もとの数を求めよ．

＜ Note ＞

第47講　p 進法

47　次の各問いに答えよ．ただし，$1234_{(6)}$ は4桁，$123_{(5)}$ は3桁，$012_{(4)}$ は2桁と判断する．

(1)　ある自然数 x は，5進法で表しても6進法で表しても3桁になり，5進法で表したときと6進法で表したときの各位の数字が逆の順になっているという．x を10進法で表して答えよ．

(2)　4進法で表しても6進法で表しても3桁になる自然数 y について，4進法で表したときと6進法で表したときの各位の数字が逆の順になっているものが存在しないことを示せ．

【選択肢】

(1)　㋐　92　　㋑　45　　㋒　87

< Note >

第48講　必要十分条件

48　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の曲線 $y=a(x-b)^2+c$ を考える．ただし，a，b，c は実数の定数で $a\neq 0$ とする．この曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線が x 軸と交点をもつとき，その交点を $(f(p),\ 0)$ とする．$f(p)$ が p の1次関数になるための a，b，c の必要十分条件を求めよ．

(2)　自然数 n の約数の個数を d とする．n の約数すべてを小さい順に並べて得られる数列を a_k $(1\leqq k\leqq d)$ とする．したがって，$a_1=1$，$a_d=n$，$a_k<a_{k+1}$ $(1\leqq k<d)$ である．このとき，n に対する次の2つの条件(イ)，(ロ)は互いに同値〔(イ) $\Longleftrightarrow$ (ロ)〕であることを示せ．

(イ)　n は60の倍数である．

(ロ)　n は6個以上の約数をもち，$\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_6}=\dfrac{1}{a_2}$ となる．

＜ Note ＞

第48講　必要十分条件

48　x, y, u, v を実数として

$$x^2+y^2=1,\ u^2+v^2=1,\ yv<0$$

を満たしているとする．このとき $(1+x+u)^2+(y+v)^2<1$ となるための必要十分条件を x と u を用いて表せ．

【選択肢】

㋐　$x+u<0$ かつ $-1 \leqq x \leqq 1$ かつ $-1 \leqq u \leqq 1$

㋑　$x+u \leqq 0$ かつ $-1 \leqq x \leqq 1$ かつ $-1 \leqq u \leqq 1$

㋒　$x+u<0$ かつ $-1<x<1$ かつ $-1<u<1$

< Note >

第 49 講　期待値

49　次の各問いに答えよ．

［A］　半径 1 の円に内接する正八角形 ABCDEFGH を考える．この 8 個の頂点から同時に 3 点選び三角形をつくるとき，三角形の面積の期待値を求めよ．

［B］　サイコロの n 回振って出た目の和を 2 乗した値を S_n とし，S_n の期待値を E_n とする．

(1)　E_2 を求めよ．

(2)　E_n を求めよ．

＜ Note ＞

第 49 講　期待値

49　1 辺の長さが 1 の立方体の頂点から相異なる 3 点を同時に選ぶこととする.

(1)　選んだ 3 点が正三角形をつくる確率を求めよ.

(2)　選んだ 3 点が直角二等辺三角形をつくる確率を求めよ.

(3)　選んだ 3 点がつくる三角形の面積の期待値を求めよ.

【選択肢】

(1)　㋐ $\dfrac{1}{14}$　㋑ $\dfrac{1}{7}$　㋒ $\dfrac{2}{7}$　㋓ $\dfrac{3}{7}$

(2)　㋐ $\dfrac{1}{14}$　㋑ $\dfrac{1}{7}$　㋒ $\dfrac{2}{7}$　㋓ $\dfrac{3}{7}$

(3)　㋐ $\dfrac{2+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{14}$　㋑ $\dfrac{1+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{14}$

　　㋒ $\dfrac{3+\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{14}$　㋓ $\dfrac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{14}$

< Note >

テキスト解答

第 25 講　平面ベクトルと図示

25　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に関して，次の各問いに答えよ．ただし，α，β は実数，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平行ではなく，双方とも零ベクトルではないものとする．

(1)　$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$，$\alpha+\beta=1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(2)　$\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta<1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(3)　$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(4)　$\alpha<1$，$\beta<1$，$\alpha+\beta>1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

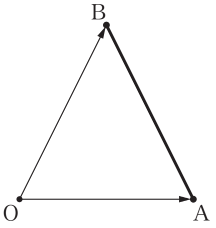
(5)　$0\leqq\beta-\alpha\leqq 1$，$1\leqq\alpha+\beta\leqq 2$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(6)　$0\leqq\beta-\alpha\leqq 1$，$1\leqq\alpha+\beta\leqq 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ を満たす点 P に関し，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値と最小値を求めよ．

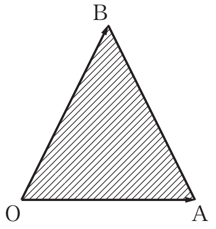
【答】　(1) 略　(2) 略　(3) 略　(4) 略　(5) 略　(6) 最大値 $\sqrt{13}$，最小値 $\sqrt{3}$

【解答】

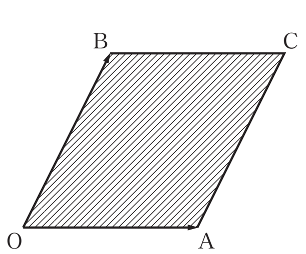
(1)　P は線分 AB 上の点．
　よって P の軌跡は図の実線．



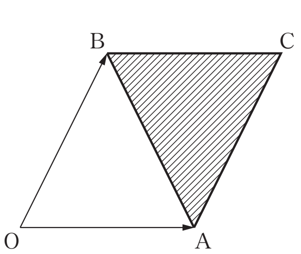
(2)　P は三角形 OAB の内部の点．
　よって P の存在領域は図の斜線部分（境界は含まない）．



(3)　点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点と定めると，P は平行四辺形 OACB の内部の点．
　よって P の存在領域は図の斜線部分（境界は含まない）．

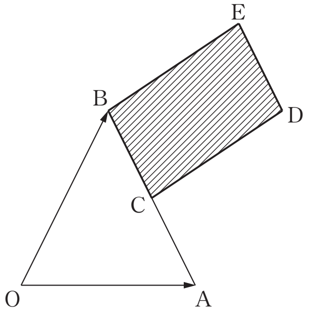


(4)　点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点と定めると，P は三角形 ACB の内部の点．
　よって P の存在領域は図の斜線部分（境界は含まない）．



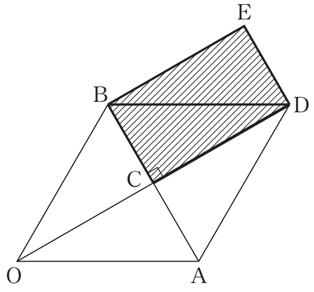
(5)　$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ となるように点 C，D，E を定めると，P は平行四辺形 BCDE の周及び内部の点.

よって P の存在領域は図の斜線部分（境界を含む）.



(6)　(5)と同様に点を定める.

題意より三角形 OAB は正三角形であるから，下図のように OC⊥AB，C はひし形 OADB の対角線の交点となる.



よって，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}$ のとき $|\overrightarrow{OP}|$ は最小値 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ をとり，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OE}$ のとき $|\overrightarrow{OP}|$ は最大値 $\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1^2}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$ をとる.

第 26 講　空間ベクトル

26　四面体 OABC に関して，辺 OA を 2：1 に内分する点を D，辺 OB の中点を E，直線 AE と直線 BD の交点を F，線分 FC の中点を G，直線 OG と底面 ABC の交点を H とする．

(1)　$\overrightarrow{OF}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

(3)　3 点 D，E，G を通る平面と直線 AC は共有点をもつか．もたない場合にはその理由を記せ．また，共有点をもつ場合はその共有点を P として $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

(4)　四面体 OABC が正四面体であるとして，点 H から 3 点 O，A，B を通る平面へ下ろした垂線の足を I とするとき，$\overrightarrow{OI}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

【答】 (1) $\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$　(2) $\overrightarrow{OH}=\frac{2}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{OC}$

(3) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$　(4) $\overrightarrow{OI}=\frac{10}{21}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

【解答】

(1)　点 D は辺 OA を 2：1 に内分するので $\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ と表せ，E は辺 OB の中点より

$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ と表せる．

F は直線 AE 上の点より実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OF}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OE}=(1-t)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{OB}$$

と表せ，また F は直線 BD 上の点より実数 u を用いて

$$\overrightarrow{OF}=(1-u)\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}u\overrightarrow{OA}+(1-u)\overrightarrow{OB}$$

と表せる．

よって，$1-t=\frac{2}{3}u$ かつ $\frac{1}{2}t=1-u$　　$\therefore$　$t=\frac{1}{2}$，$u=\frac{3}{4}$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}}$

(2)　G は線分 FC の中点より $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ と表せる．

H は直線 OG 上の点より実数 v を用いて $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{4}v\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}v\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}v\overrightarrow{OC}$ と表せ，

また H は底面 ABC 上の点より $\frac{1}{4}v+\frac{1}{8}v+\frac{1}{2}v=1$　　$\therefore$　$v=\frac{8}{7}$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{OH}=\frac{2}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{OC}}$

(3)　3 点 D，E，G を通る平面と直線 AC が共有点をもつとし，その点を P と仮定すると，P は直線 AC 上の点より実数 w を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-w)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+w\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表せ，また P は平面 DEG 上の点より，和が 1 となる 3 つの実数 x，y，z を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=x\overrightarrow{\mathrm{OD}}+y\overrightarrow{\mathrm{OE}}+z\overrightarrow{\mathrm{OG}}\\&=x\times\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\times\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+z\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}z\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{8}z\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}z\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

と表せるので

$$\begin{cases}1-w=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{4}z\\0=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{8}z\\w=\dfrac{1}{2}z\\x+y+z=1\end{cases}$$

を満たす実数 x，y，z，w が存在する．

　この 4 式より $x=0$，$y=-\dfrac{1}{3}$，$z=\dfrac{4}{3}$，$w=\dfrac{2}{3}$ を得る．よって直線 AC と 3 点 D，E，G を通る平面は共有点をもち，これらの値より　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

(4)　OABC が正四面体より，一辺の長さを $2a$ とおくと $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2a$ であり，すべての面が正三角形より $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\frac{\pi}{3}=2a\times2a\times\frac{1}{2}=2a^2$$

を得る．同様に $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2a^2$

　ここで I は平面 OAB 上の点より，実数 α，β を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表せるが，HI⊥OA より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\left(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\alpha|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\beta\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{7}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=2a^2\left(2\alpha+\beta-\frac{9}{7}\right)=0\end{aligned}$$

となるので　$2\alpha+\beta=\dfrac{9}{7}$　……①　を得る．

　また HI⊥OB より同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{7}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$=2a^2\left(\alpha+2\beta-\frac{8}{7}\right)=0$$

となるので　$\alpha+2\beta=\frac{8}{7}$　……②　を得る.

　①と②より $\alpha=\frac{10}{21}$，$\beta=\frac{1}{3}$ となるので　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{10}{21}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

第 27 講　点と直線の距離

27　次の各問いに答えよ.

(1)　点 $(p,\ q)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d が

$$d=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

であることを示せ.

(2)　点 $(2,\ 4)$ から引いた円 $x^2+(y-1)^2=1$ の接線を求めよ.

(3)　円 $x^2+(y-1)^2=25$ と直線 $y=mx+5$ が 2 点 A，B で交わっていて AB$=8$ を満たしているとき，定数 m の値を求めよ.

【答】 (1) 略　(2) $y=\dfrac{6\pm2\sqrt{3}}{3}(x-2)+4$　(3) $m=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

【解答】

(1)　点 $(p,\ q)$ を P とし，点 P から直線 $ax+by+c=0$ に下ろした垂線の足を H とする.

H は直線 $ax+by+c=0$ に垂直で点 $(p,\ q)$ を通る直線上の点であるから，実数 k を用いて $\mathrm{H}(ak+p,\ bk+q)$ と表せ，この点が直線 $ax+by+c=0$ 上にあるので

$$a(ak+p)+b(bk+q)+c=0$$

$$\therefore\quad k=-\frac{ap+bq+c}{a^2+b^2}$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=k(a,\ b)$ より

$$d=|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=|k|\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を得る.

(2)　点 $(2,\ 4)$ を通り y 軸に平行な直線 $x=2$ は円 $x^2+(y-1)^2=1$ の接線にはならないので，求める接線の傾きを m としてその接線は $y=m(x-2)+4$ すなわち $mx-y-2m+4=0$ と表せる.

この直線と円の中心$(0,\ 1)$ との距離が，円の半径の 1 と等しいので

$$\frac{|m\cdot0-1-2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$|-2m+3|=\sqrt{m^2+1}$$

$$4m^2-12m+9=m^2+1$$

$$3m^2-12m+8=0$$

$$\therefore\quad m=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{3}$$

よって求める接線は　$\boldsymbol{y=\dfrac{6\pm2\sqrt{3}}{3}(x-2)+4}$

$$\therefore\quad y=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{3}x\mp\frac{4\sqrt{3}}{3}\quad(\text{複号同順})$$

(3)　円の中心を C(0, 1)，AB の中点を M とすると，AB は円の弦となるので AM＝BM となり，CA は円の半径になるので，三平方の定理より

$$\mathrm{AM}^2+\mathrm{CM}^2=\mathrm{CA}^2$$
$$\mathrm{CM}^2=\mathrm{CA}^2-\mathrm{AM}^2$$

よって $\mathrm{CM}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ であるが，長さ CM は直線 $y=mx+5$ すなわち $mx-y+5=0$ と点 C(0, 1) との距離であるので

$$\frac{|m\cdot 0-1+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$$
$$4=3\sqrt{m^2+1}$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{m=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}}$$

第 28 講　軌跡の求め方

28　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の点 P から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の接点を A，円 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ に引いた接線の接点を B とする．PA：PB＝$\sqrt{2}$：1 を満たす点 P の軌跡を求めよ．

(2)　曲線 $C：y=x^2-2x$ と直線 $l：y=mx+m$（m は定数）の異なる 2 つの交点を P，Q とする．線分 PQ の中点の軌跡を求めよ．

(3)　2 直線 $mx-y-m=0$，$x+my-m=0$ の共有点 P の軌跡を求めよ．ただし，m は実数定数とする．

【答】 (1) 円 $(x-6)^2+(y-4)^2=33$

(2) 放物線の一部 $y=2(x-1)(x+1)$（$x<-1-\sqrt{3}$，$x>-1+\sqrt{3}$）

(3) 円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ の点 (1，1) を除いた部分

【解答】

(1)　O(0，0)，C(3，2) として，P(X，Y) とおく．

∠PAO と ∠PBC はともに直角であるので，三平方の定理より $PA^2=OP^2-OA^2$，$PB^2=CP^2-CB^2$ となる．

ここで，PA：PB＝$\sqrt{2}$：1 より

$$2PB^2=PA^2$$
$$2(CP^2-CB^2)=OP^2-OA^2$$
$$2\{(X-3)^2+(Y-2)^2-2^2\}=X^2+Y^2-1^2$$

であるから，点 P の軌跡の方程式は $x^2+y^2-12x-8y+19=0$ となる．

$(x-6)^2+(y-4)^2=33$（>0）と変形できるので，求める軌跡は

$$\textbf{円 }(x-6)^2+(y-4)^2=33$$

(2)　線分 PQ の中点を M(X，Y) とする．

C と l の式を連立すると

$$x^2-2x=mx+m$$
$$x^2-(m+2)x-m=0$$

これが異なる 2 つの実数解をもつので

$$(m+2)^2-4(-m)>0$$
$$m^2+8m+4>0$$
$$\therefore\quad m<-4-2\sqrt{3},\ m>-4+2\sqrt{3}\quad\cdots\cdots①$$

異なる 2 つの解を α，β（$\alpha<\beta$）とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=m+2,\qquad \alpha\beta=-m$$

ここで P，Q は直線 l 上の点より P(α，$m(\alpha+1)$)，Q(β，$m(\beta+1)$)，さらに M(X，Y) は線分 PQ の中点であるから

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m+2}{2}\quad\cdots\cdots②$$

$$Y=\frac{m(\alpha+1)+m(\beta+1)}{2}$$

$$=\frac{m(\alpha+\beta)+2m}{2}=\frac{m(m+2)+2m}{2}=\frac{m(m+4)}{2}\quad\cdots\cdots③$$

②より $m=2(X-1)$，これを③に代入して

$$Y=\frac{2(X-1)(2X+2)}{2}=2(X-1)(X+1)$$

また，①へ代入して

$$2(X-1)<-4-2\sqrt{3},\ 2(X-1)>-4+2\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad X<-1-\sqrt{3},\ X>-1+\sqrt{3}$$

よって求める軌跡は

放物線の一部 $y=2(x-1)(x+1)$ $(x<-1-\sqrt{3},\ x>-1+\sqrt{3})$

(3)　$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とすると，P は 2 直線の交点であるので

$$mX-Y-m=0\quad\cdots\cdots①,\qquad X+mY-m=0\quad\cdots\cdots②$$

が成り立つ．ここで，①より $m(X-1)=Y$ となるが

(Ⅰ)　$X\neq1$ のとき $m=\dfrac{Y}{X-1}$ と変形できるので，これを②へ代入して

$$X+\frac{Y}{X-1}\cdot Y-\frac{Y}{X-1}=0$$

$$\therefore\quad \left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\quad(X\neq1)$$

を得る．

(Ⅱ)　$X=1$ のとき①より $Y=0$ となるが，これらと②より $1+m\cdot0-m=0$ すなわち $m=1$ を得る．よって $(X,\ Y)=(1,\ 0)$

以上より求める軌跡は

円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ の点 $(1,\ 1)$ を除いた部分

第 29 講　通過領域

29　円 C：$x^2+y^2-4ax-(a^2+2)y+4a^2=0$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　a が任意の実数値をとりながら変化するとき，円 C が通過する領域を求めよ．

(2)　a が正の値をとりながら変化するとき，円 C が通過する領域を求めよ．

(3)　a が任意の実数値をとりながら変化するとき，円 C の内部の点が通過しない領域を求めよ．

【答】　(1) $y \geqq 0$，$x^2+(y-3)^2 \geqq 1$ の表す領域から点 $(0,\ 4)$ を除いた部分

(2) $y>4$　または　$\begin{cases} x^2+(y-1)^2<1 \\ x \leqq 0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x>0 \\ 0 \leqq y \leqq 4 \\ x^2+(y-3)^2 \geqq 1 \end{cases}$

(3) $y \leqq 0$　または　$x^2+(y-3)^2 \leqq 1$

【解答】

(1)　$x^2+y^2-4ax-(a^2+2)y+4a^2=0$ より

$$(4-y)a^2-4xa+x^2+y^2-2y=0 \quad \cdots\cdots①$$

を a の方程式とみて，①が実数解をもつ条件を考える．

①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2x)^2-(4-y)(x^2+y^2-2y)=y\{x^2+(y-3)^2-1\}$$

となるので

(Ⅰ)　$4-y \neq 0$ かつ $\dfrac{D}{4} \geqq 0$

または　(Ⅱ)　$4-y=0$ かつ $-4x \neq 0$

または　(Ⅲ)　$4-y=0$ かつ $-4x=0$ かつ $x^2+y^2-2y=0$

であればよい．

(Ⅰ)は $y \geqq 0$，$x^2+(y-3)^2 \geqq 1$ の $y=4$ を除いた部分．

(Ⅱ)は直線 $y=4$ の $x=0$ を除いた部分．

(Ⅲ)を満たす $(x,\ y)$ は存在しない．

以上より求める領域は

$y \geqq 0$，$x^2+(y-3)^2 \geqq 1$ の表す領域から点 $(0,\ 4)$ を除いた部分

(2)　①が少なくとも 1 つの正の解をもつ条件を考える．

(Ⅰ)　$4-y \neq 0$ のとき，①の実数解がともに 0 以下である条件

$$\frac{D}{4} \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad \text{解と係数の関係より } \frac{4x}{4-y} \leqq 0,\ \frac{x^2+y^2-2y}{4-y} \geqq 0$$

すなわち

$$x \leqq 0,\ 0 \leqq y<4,\ x^2+(y-3)^2 \geqq 1,\ x^2+(y-1)^2 \geqq 1$$

の表す領域を(1)の(Ⅰ)の領域から除いた部分．

(Ⅱ)　$4-y=0$，$-4x\neq 0$ すなわち $y=4$ $(x\neq 0)$ のとき①の実数解は

$a=\dfrac{x^2+y^2-2y}{4x}=\dfrac{x^2+8}{4x}$ となるが，これが正となる条件は $\dfrac{x^2+8}{4x}>0$

すなわち $x>0$ であるから，条件は $y=4$ $(x>0)$

(Ⅲ)　$4-y=0$，$-4x=0$，$x^2+y^2-2y=0$ のとき①は任意の解をもつが，これらを満たす $(x,\ y)$ は存在しない.

以上より求める領域は

$$\boldsymbol{y>4}\quad \textbf{または}\quad \begin{cases} \boldsymbol{x^2+(y-1)^2<1} \\ \boldsymbol{x\leqq 0} \end{cases}\quad \textbf{または}\quad \begin{cases} \boldsymbol{x>0} \\ \boldsymbol{0\leqq y\leqq 4} \\ \boldsymbol{x^2+(y-3)^2\geqq 1} \end{cases}$$

(3)　$x^2+y^2-4ax-(a^2+2)y+4a^2<0$ より

$$(4-y)a^2-4xa+x^2+y^2-2y<0 \quad \cdots\cdots ②$$

を a の不等式とみて，②が実数解をもたない条件を考えればよい.

(Ⅰ)　$4-y>0$ すなわち $y<4$ のとき，②は

$$a^2-\frac{4x}{4-y}a+\frac{x^2+y^2-2y}{4-y}<0$$

したがって

$$\left(a-\frac{2x}{4-y}\right)^2-\frac{y\{x^2+(y-3)^2-1\}}{(4-y)^2}<0$$

となるので，②が実数解をもたないためには $y\{x^2+(y-3)^2-1\}\leqq 0$ であればよい.

$$y<4 \quad かつ \quad y\{x^2+(y-3)^2-1\}\leqq 0$$

これを整理して

$$\begin{cases} y<4 \\ y\leqq 0 \ または\ x^2+(y-3)^2\leqq 1 \end{cases}$$

(Ⅱ)　$4-y=0$ すなわち $y=4$ のとき，②は $-4xa+x^2+8<0$　よって

$$\begin{cases} 4x>0 \ のとき \quad a>\dfrac{x^2+8}{4x} \\ 4x=0 \ のとき \quad 解なし \\ 4x<0 \ のとき \quad a<\dfrac{x^2+8}{4x} \end{cases}$$

であるから，②が解をもたないためには $y=4$ かつ $4x=0$ すなわち $(x,\ y)=(0,\ 4)$ であればよい.

(Ⅲ)　$4-y<0$ すなわち $y>4$ のとき，②は常に解をもつので不適.

以上より求める領域は

$$\boldsymbol{y\leqq 0}\quad \textbf{または}\quad \boldsymbol{x^2+(y-3)^2\leqq 1}$$

第 30 講　領域と最大最小問題

30　4つの不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad 3x+4y \leqq 35,\quad 4x+3y \leqq 35$$

で表される領域を D とし，不等式 $x^2+y^2-10x-10y+25 \leqq 0$ で表される領域を E とする．

(1)　領域 D と領域 E の共通部分を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D と領域 E の共通部分を動くとき，$4x+5y$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

(3)　点 $(x,\ y)$ が領域 D と領域 E の共通部分を動くとき，$y-ax$ の最大値を求めよ．ただし，a は実数の定数とする．

【答】 (1) 略　(2) 最大値 45，最小値 $45-5\sqrt{41}$

(3) 最大値
$$\begin{cases} 5-5a+5\sqrt{a^2+1} & \left(a \geqq \dfrac{4}{3} \text{ のとき}\right) \\ 8-a & \left(-\dfrac{3}{4} \leqq a < \dfrac{4}{3} \text{ のとき}\right) \\ 5-5a & \left(-\dfrac{4}{3} \leqq a < -\dfrac{3}{4} \text{ のとき}\right) \\ 1-8a & \left(a < -\dfrac{4}{3} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

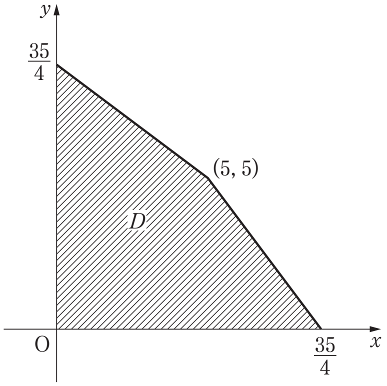
【解答】

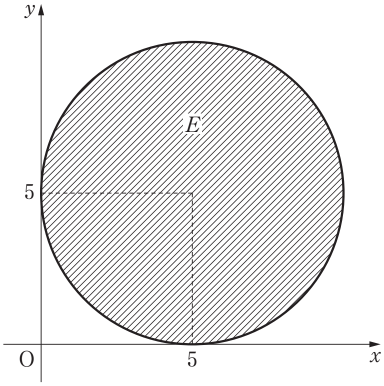
(1)　$3x+4y \leqq 35$ より $y \leqq -\dfrac{3}{4}x+\dfrac{35}{4}$，$4x+3y \leqq 35$ より $y \leqq -\dfrac{4}{3}x+\dfrac{35}{3}$

よって領域 D は左下図の斜線部分（境界を含む）．

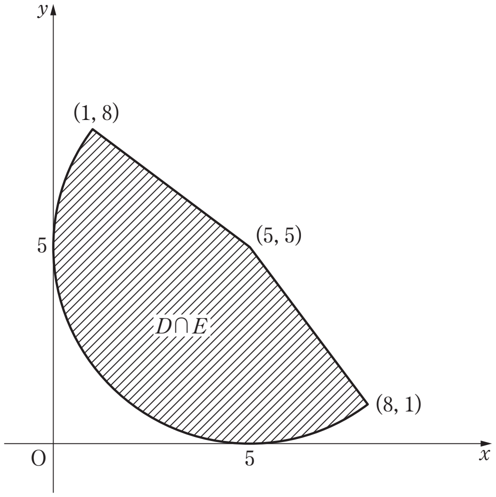
$x^2+y^2-10x-10y+25 \leqq 0$ より $(x-5)^2+(y-5)^2 \leqq 25$

よって領域 E は右下図の斜線部分（境界を含む）．





よって領域 D と領域 E の共通部分は下図の斜線部分（境界を含む）.



(2)　$4x+5y=k$ とおく．直線 $y=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{k}{5}$ が領域 D と領域 E の共通部分と共有点をもつような k の値を考えればよい.

$(x,\ y)=(5,\ 5)$ のとき k は最大値　$k=4x+5y=4\cdot5+5\cdot5=\mathbf{45}$　をとる.

また，直線 $4x+5y-k=0$ と円 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ が接し，かつ y 切片 $\dfrac{k}{5}$ が $\dfrac{k}{5}<5$ を満たしているとき k は最小となるので

$$\frac{|4\cdot5+5\cdot5-k|}{\sqrt{4^2+5^2}}=5,\qquad \frac{k}{5}<5$$

$$\therefore\quad k=45\pm5\sqrt{41},\qquad k<25$$

よって　$k=\mathbf{45-5\sqrt{41}}$　が最小値である.

(3)　$y-ax=k$ とおく．直線 $y=ax+k$ が領域 D と領域 E の共通部分と共有点をもつような k の値を考えればよい.

(Ⅰ)　$a\geqq\dfrac{4}{3}$ のとき，直線 $ax-y+k=0$ と円が接し，y 切片 k が $k>0$ であるとき k は最大となるので

$$\frac{|a\cdot5-5+k|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=5\ \ (k>0)$$

$$\therefore\quad k=5-5a+5\sqrt{a^2+1}$$

(Ⅱ)　$-\dfrac{3}{4}\leqq a<\dfrac{4}{3}$ のとき，直線 $y=ax+k$ が点 $(1,\ 8)$ を通るとき k は最大となるので，そのときの最大値は　$k=y-ax=8-a$

(Ⅲ)　$-\dfrac{4}{3}\leqq a<-\dfrac{3}{4}$ のとき，直線 $y=ax+k$ が点 $(5,\ 5)$ を通るとき k は最大となるので，そのときの最大値は　$k=y-ax=5-5a$

(Ⅳ)　$a<-\dfrac{4}{3}$ のとき，直線 $y=ax+k$ が点 $(8,\ 1)$ を通るとき k は最大となるので，そのときの最大値は　$k=y-ax=1-8a$

以上より，最大値は
$$\begin{cases} 5-5a+5\sqrt{a^2+1} & \left(a\geqq\dfrac{4}{3}\text{ のとき}\right) \\ 8-a & \left(-\dfrac{3}{4}\leqq a<\dfrac{4}{3}\text{ のとき}\right) \\ 5-5a & \left(-\dfrac{4}{3}\leqq a<-\dfrac{3}{4}\text{ のとき}\right) \\ 1-8a & \left(a<-\dfrac{4}{3}\text{ のとき}\right) \end{cases}$$

第31講　円順列やじゅず順列

31　白球が1個，赤球が4個，青球が n 個用意されている．これら $n+5$ 個の球をすべて使って以下のように並べる場合，並べ方の総数を求めよ．

(1)　横1列に並べる場合，両端が赤で横1列に並べる場合，赤が隣り合わないで横1列に並べる場合の各場合

(2)　円形に並べる場合

(3)　ネックレス状に並べる場合

【答】 (1) 順に $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{24}$，$\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$，

$\dfrac{(n-1)n(n+1)^2(n+2)}{24}$　(2) $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24}$

(3) n が偶数のとき $\dfrac{(n+2)(n+4)(n^2+4n+6)}{48}$，

n が奇数のとき $\dfrac{(n+1)(n+3)(n^2+6n+11)}{48}$

【解答】

(1)　(Ⅰ)　横1列に並べる場合

合計で $n+5$ 個並べることになるが，この $n+5$ か所に白，赤，青の順に配置を決めていくことにすると，

$n+5$ か所中，白球の場所1か所を選ぶので，${}_{n+5}C_1$ 通り．

次に，残った $n+4$ か所中，赤球の場所4か所を選ぶので，${}_{n+4}C_4$ 通り．

最後に青球 n 個の場所は1通りに決まる．

以上より，横1列に並べる方法は

$${}_{n+5}C_1\times{}_{n+4}C_4\times 1=\boldsymbol{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{24}}\ \text{（通り）}$$

(Ⅱ)　両端が赤で横1列に並べる場合

まず最初に両端の赤を並べる方法は，1通り．

次に，残った $n+3$ か所に白，赤，青の順に配置を決めていくことにすると，

$n+3$ か所中，白球の場所1か所を選ぶので，${}_{n+3}C_1$ 通り．

次に，残った $n+2$ か所中，残った赤球の場所2か所を選ぶので，${}_{n+2}C_2$ 通り．

最後に青球 n 個の場所は1通りに決まる．

以上より，両端が赤で横1列に並べる方法は

$$1\times{}_{n+3}C_1\times{}_{n+2}C_2\times 1=\boldsymbol{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2}}\ \text{（通り）}$$

(Ⅲ)　まずは，赤球以外の白球1個と青球 n 個の合計 $n+1$ 個を並べる．

$n+1$ か所中，白球の場所1か所を選ぶので，${}_{n+1}C_1$ 通り．

次に，並べられた $n+1$ 個の球どうしの間の n か所と両端の2か所の合計 $n+2$ か所の中から，赤球の場所4か所を選ぶので，${}_{n+2}C_4$ 通り．

以上より，赤球が隣り合わないで横１列に並べる方法は

$${}_{n+1}\mathrm{C}_1\times{}_{n+2}\mathrm{C}_4=\frac{(n-1)n(n+1)^2(n+2)}{24}\ \text{（通り）}$$

(2)　まずは白球を１か所に固定する．次に残りの $n+4$ か所の中から赤球の場所４か所を選ぶので，${}_{n+4}\mathrm{C}_4$ 通り．

最後に青球 n 個の場所は１通りに決まる．

以上より，円形に並べる方法は

$${}_{n+4}\mathrm{C}_4\times 1=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24}\ \text{（通り）}$$

(3)　(Ⅰ)　**n が偶数のとき**

(2)で求めた円形に並べる方法のうち，色の並びが左右対称になっているのは ${}_{\frac{n+4}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りで，これら以外はある並びに関して必ず左右対称な並び方が存在する．

よってネックレス状に並べるとき

$$\frac{1}{2}\left({}_{n+4}\mathrm{C}_4-{}_{\frac{n+4}{2}}\mathrm{C}_2\right)+{}_{\frac{n+4}{2}}\mathrm{C}_2=\frac{(n+2)(n+4)(n^2+4n+6)}{48}\ \text{（通り）}$$

(Ⅱ)　**n が奇数のとき**

色の並びが左右対称になっているのは ${}_{\frac{n+3}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りで，これら以外はある並びに関して必ず左右対称な並び方が存在する．

よってネックレス状に並べるとき

$$\frac{1}{2}\left({}_{n+4}\mathrm{C}_4-{}_{\frac{n+3}{2}}\mathrm{C}_2\right)+{}_{\frac{n+3}{2}}\mathrm{C}_2=\frac{(n+1)(n+3)(n^2+6n+11)}{48}\ \text{（通り）}$$

第32講　n 人を部屋に分ける

32 n 人を区別のつく k 部屋に分ける場合を考える．ここで，n と k は自然数で，$n \geqq k$ とする．また，各部屋には少なくとも1人以上が割り当てられるものとする．

(1) $k=2$ のとき，分け方は何通りあるか求めよ．

(2) $k=3$ のとき，分け方は何通りあるか求めよ．

(3) $k=4$ のとき，分け方は何通りあるか求めよ．

(4) $k=10$ のとき，分け方は何通りあると予想できるか．

【答】 (1) 2^n-2（通り） (2) $3^n-3\cdot 2^n+3$（通り） (3) $4^n-4\cdot 3^n+6\cdot 2^n-4$（通り）

(4) ${}_{10}C_0 10^n-{}_{10}C_1 9^n+{}_{10}C_2 8^n-{}_{10}C_3 7^n+{}_{10}C_4 6^n-{}_{10}C_5 5^n+{}_{10}C_6 4^n-{}_{10}C_7 3^n+{}_{10}C_8 2^n-{}_{10}C_9 1^n+{}_{10}C_{10} 0^n$（通り）

【解答】

(1) 2つの部屋に n 人を分ける 2^n 通りから，1つの部屋に n 人が集中する2通りを除けばよいので，$\boldsymbol{2^n-2}$ **（通り）**

(2) 3つの部屋に n 人を分ける 3^n 通りから，1つの部屋に n 人が集中する3通りと，2つの部屋だけに少なくとも1人ずつ分ける $3(2^n-2)$ 通りを除けばよいので

$3^n-3-3(2^n-2)=\boldsymbol{3^n-3\cdot 2^n+3}$ **（通り）**

(3) 4つの部屋に n 人を分ける 4^n 通りから，1つの部屋に n 人が集中する4通りと，2つの部屋だけに少なくとも1人ずつ分ける ${}_4C_2(2^n-2)$ 通り，そして3つの部屋だけに少なくとも1人ずつ分ける ${}_4C_3(3^n-3\cdot 2^n+3)$ 通りを除けばよいので

$4^n-4-{}_4C_2(2^n-2)-{}_4C_3(3^n-3\cdot 2^n+3)=\boldsymbol{4^n-4\cdot 3^n+6\cdot 2^n-4}$ **（通り）**

(4) (1)～(3)の結果の係数より，題意の分け方は

$${}_kC_0 k^n-{}_kC_1(k-1)^n+{}_kC_2(k-2)^n+\cdots\cdots$$
$$+{}_kC_{k-2}(-1)^{k-2}2^n+{}_kC_{k-1}(-1)^{k-1}1^n+{}_kC_k(-1)^k 0^n \text{（通り）}$$

と推測される．

よって $k=10$ のとき

$$\boldsymbol{{}_{10}C_0 10^n-{}_{10}C_1 9^n+{}_{10}C_2 8^n-{}_{10}C_3 7^n+{}_{10}C_4 6^n}$$
$$\boldsymbol{-{}_{10}C_5 5^n+{}_{10}C_6 4^n-{}_{10}C_7 3^n+{}_{10}C_8 2^n-{}_{10}C_9 1^n+{}_{10}C_{10} 0^n} \text{（通り）}$$

と予想できる．

第 33 講　最短経路

33　図のような碁盤の目状の道路がある．S 地点を出発して，道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える（図 1 の太線はそのような経路の一例である）．

(1)　S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか．

(2)　S 地点から G 地点に至る経路のうち，図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか．

(3)　図 3 の a，b の 2 か所が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか．

(4)　図 4 の α，β の 2 か所が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか．

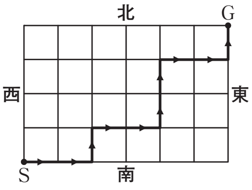


図 1

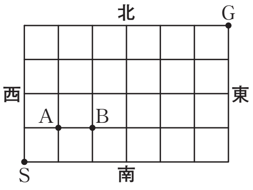


図 2

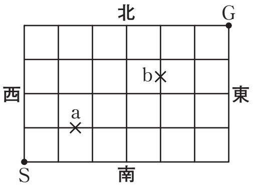


図 3

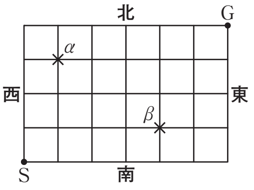


図 4

【答】　(1) 210 通り　(2) 70 通り　(3) 113 通り　(4) 136 通り

【解答】

(1)　東へ 6 区画，北へ 4 区画移動するので 10 回の移動の中で，北へ移動するところを考えると

$$ {}_{10}C_4 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1} $$

$$ = \mathbf{210}\ \textbf{（通り）} $$

(2)　(1)と同様に考えると，S から A への経路は ${}_2C_1$ 通り，A から B への経路は 1 通り，B から G への経路は ${}_7C_3$ 通りであるから

$$ {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times {}_7C_3 = 2\times1\times\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} $$

$$ = \mathbf{70}\ \textbf{（通り）} $$

(3)　a を通るのは(2)より 70 通り．b を通るのは

$$ {}_6C_2 \times {}_1C_1 \times {}_3C_1 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1}\times1\times3 = 45\ \text{（通り）} $$

a と b の両方を通るのは

$$ {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times {}_3C_1 \times {}_1C_1 \times {}_3C_1 = 18\ \text{（通り）} $$

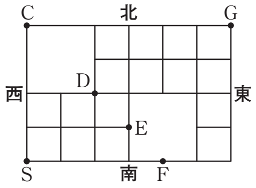
以上より a または b を通るのは

$$ 70+45-18=97\ \text{（通り）} $$

となるので，a，b の 2 か所を通らないのは

$$ 210-97=\mathbf{113}\ \textbf{（通り）} $$

(4)　α と β が通行止めなので，図のような経路を考え，C，D，E，F を図のように定めると，C，D，E，F のどれかを経由すると，このうちの他の 3 点のどこも経由しないことがわかる．



このとき

C 経由の経路は 1 通り

D 経由の経路は ${}_4C_2 \times {}_6C_2 = 90$（通り）

E 経由の経路は ${}_4C_1 \times {}_5C_2 = 40$（通り）

F 経由の経路は $1 \times {}_5C_1 = 5$（通り）

となるので，求める経路は $1+90+40+5=$ **136（通り）**

≪別解≫

(4)　α を経由するものは ${}_4C_1 \times {}_6C_1 = 24$（通り），$\beta$ を経由するものは ${}_5C_1 \times {}_5C_2 = 50$（通り）であるので，(1)の 210 通りからこの 2 つの経由した経路を除くと

$210-24-50=$ **136（通り）**

となる．

第 34 講　事象の考え方と確率

34　9 枚のカードに 1 から 9 までの数字が 1 つずつ記してある．このカードの中から任意に 1 枚を抜き出し，その数字を記録し，もとのカードの中に戻すという操作を n 回繰り返す．

(1)　記録された数の積が 5 で割り切れる確率を求めよ．

(2)　記録された数の積が 10 で割り切れる確率を求めよ．

(3)　記録された数の積が 50 で割り切れる確率を求めよ．

【答】 (1) $\dfrac{9^n-8^n}{9^n}$　(2) $\dfrac{9^n-8^n-5^n+4^n}{9^n}$　(3) $\dfrac{9^n-(n+8)8^{n-1}-5^n+(n+4)4^{n-1}}{9^n}$

【解答】

(1)　n 回のうち 5 が 1 回も出ない事象の余事象であるから

$$1-\left(\frac{8}{9}\right)^n=\boldsymbol{\frac{9^n-8^n}{9^n}}$$

(2)　少なくとも偶数と 5 が 1 回ずつ入っていればよい．

偶数が 0 回の確率は $\left(\dfrac{5}{9}\right)^n$，5 が 0 回の確率は $\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$，偶数も 5 も 0 回の確率は $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ となるので，偶数または 5 のどちらかが 1 回も出ない確率は $\left(\dfrac{5}{9}\right)^n+\left(\dfrac{8}{9}\right)^n-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$

よって $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}&1-\left\{\left(\frac{5}{9}\right)^n+\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}\\&=1-\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{8}{9}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n\\&=\frac{9^n-8^n-5^n+4^n}{9^n}\end{aligned}$$

$n=1$ のとき 10 の倍数とはならず確率は 0 であり，上記の確率は $n=1$ のとき 0 になるので，$n\geqq 1$ について求める確率は

$$\boldsymbol{\frac{9^n-8^n-5^n+4^n}{9^n}}$$

である．

(3)　$50=2\cdot 5^2$ より，偶数が少なくとも 1 回，5 は少なくとも 2 回入っていればよい．

(2)では，偶数と 5 が少なくとも 1 回入っている場合の確率を求めたので，5 が 1 回だけ出て偶数が少なくとも 1 回出る確率を求め，(2)の確率から引けばよい．

5 が 1 回だけ出る確率は ${}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}$ であり，5 が 1 回だけ出て偶数が 1 回も出ない確率は ${}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$ であるので，5 が 1 回だけ出て偶数が少なくとも 1 回出る確率は

${}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}-{}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$ $(n\geqq 2)$ となる．

よって求める確率は，$n\geqq 3$ のとき

$$1-\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{8}{9}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n-\left\{{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}-{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{9^n-(n+8)8^{n-1}-5^n+(n+4)4^{n-1}}{9^n}$$

$n=1$，2 のとき 50 の倍数とはならず確率は 0 であり，上記の確率は $n=1$，2 のとき 0 になるので，$n\geqq 1$ について求める確率は

$$\boldsymbol{\frac{9^n-(n+8)8^{n-1}-5^n+(n+4)4^{n-1}}{9^n}}$$

である．

第 35 講　条件付き確率

35　区別のつかない 3 個の赤い球と 7 個の白い球の合計 10 個が袋の中に入っている．この袋の中から 1 個ずつ 2 回に分けて球を取り出すとき，1 回目に赤い球を取り出す事象を A，2 回目に赤い球を取り出す事象を B とする．次のそれぞれの場合において，条件付き確率 $P_A(B)$ と $P_B(A)$ を求めよ．

(1)　取り出した球はもとの袋に戻さない場合

(2)　取り出した球はもとの袋に戻す場合

(3)　取り出した球が赤の場合はもとの袋に戻し，取り出した球が白の場合はもとの袋に戻さない場合

(4)　取り出した球が白の場合はもとの袋に戻し，取り出した球が赤の場合はもとの袋に戻さない場合

【答】 (1)　$P_A(B)=\dfrac{2}{9}$，$P_B(A)=\dfrac{2}{9}$　(2) $P_A(B)=\dfrac{3}{10}$，$P_B(A)=\dfrac{3}{10}$

(3) $P_A(B)=\dfrac{3}{10}$，$P_B(A)=\dfrac{27}{97}$　(4) $P_A(B)=\dfrac{2}{9}$，$P_B(A)=\dfrac{20}{83}$

【解答】

取り出した球を戻す戻さないに関わらず，1 回目に取り出す色に影響を及ぼさないので，

$P(A)=\dfrac{3}{10}$，$P(\overline{A})=\dfrac{7}{10}$ となる．

(1)　取り出した球をもとに戻さないので，1 回目に赤球を取り出した場合，2 回目の試行の前には赤球が 2 個，白球が 7 個となっているので

$P(A\cap B)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}$，$P(A\cap\overline{B})=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{9}$ となる．

また 1 回目に白球を取り出した場合，2 回目の試行の前には赤球が 3 個，白球が 6 個となっているので $P(\overline{A}\cap B)=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{9}$，$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{6}{9}$ となる．

以上より，$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}}{\dfrac{3}{10}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}}{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}+\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{9}}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(2)　取り出した球をもとに戻すので，2 回目の試行は 1 回目と同じに考えられるので

$P(A\cap B)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{10}$，$P(A\cap\overline{B})=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{10}$，$P(\overline{A}\cap B)=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{10}$，

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{7}{10}$ となる．

以上より，$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{10}}{\dfrac{3}{10}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{10}}{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{10}}=\boldsymbol{\frac{3}{10}}$$

(3)　1 回目に赤球を取り出した場合は取り出した球をもとに戻すので，2 回目の試行は 1 回目と同じに考えて $P(A\cap B)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{10}$，$P(A\cap\overline{B})=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{10}$ となる．

また 1 回目に白球を取り出した場合は取り出した球をもとに戻さないので，2 回目の試行の前には赤球が 3 個，白球が 6 個となっているので

$P(\overline{A}\cap B)=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{9}$，$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{6}{9}$ となる．

以上より，$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{10}}{\dfrac{3}{10}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{10}}{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{9}}=\boldsymbol{\frac{27}{97}}$$

(4)　1 回目に赤球を取り出した場合は取り出した球をもとに戻さないので，2 回目の試行の前には赤球が 2 個，白球が 7 個となっているので

$P(A\cap B)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}$，$P(A\cap\overline{B})=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{9}$ となる．

また 1 回目に白球を取り出した場合は取り出した球をもとに戻すので，2 回目の試行は 1 回目と同じに考えて $P(\overline{A}\cap B)=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{10}$，$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{7}{10}$ となる．

以上より，$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}}{\dfrac{3}{10}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}}{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}+\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{10}}=\boldsymbol{\frac{20}{83}}$$

第 36 講　相加平均と相乗平均

36　次の各問いに答えよ．

(1)　x，y を正の実数とする．$(x+4y)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)$ の最小値を求めよ．

(2)　$x>1$ とするとき，$\frac{x^2+1}{x-1}$ の最小値を求めよ．

(3)　$x>-2$ とするとき，$\frac{x+2}{x^2+4x+8}$ の最大値を求めよ．

【答】 (1) 最小値 49 $\left(\frac{x}{y}=\frac{2}{3}\right.$ のとき)　(2) 最小値 $2+2\sqrt{2}$ ($x=1+\sqrt{2}$ のとき)

(3) 最大値 $\frac{1}{4}$ ($x=0$ のとき)

【解答】

(1)　$(x+4y)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)=\frac{9x}{y}+\frac{4y}{x}+37$ である．

ここで，$x>0$，$y>0$ より $\frac{9x}{y}>0$，$\frac{4y}{x}>0$ であるので

$$\frac{9x}{y}+\frac{4y}{x}\geqq 2\sqrt{\frac{9x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}=12$$

等号は $\frac{9x}{y}=\frac{4y}{x}$ つまり $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ のとき成立する．

よって $\frac{9x}{y}+\frac{4y}{x}+37\geqq 49$ より，求める最小値は **49** $\left(\frac{x}{y}=\frac{2}{3}\right.$ のとき)

(2)　$\frac{x^2+1}{x-1}=x-1+\frac{2}{x-1}+2$ である．

ここで，$x>1$ より $x-1>0$，$\frac{2}{x-1}>0$ であるので

$$x-1+\frac{2}{x-1}\geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{2}{x-1}}\geqq 2\sqrt{2}$$

等号は $x-1=\frac{2}{x-1}$ つまり $x=1+\sqrt{2}$ のとき成立する．

よって $x-1+\frac{2}{x-1}+2\geqq 2+2\sqrt{2}$ より，求める最小値は $\mathbf{2+2\sqrt{2}}$ ($x=1+\sqrt{2}$ のとき)

(3)　$x+2>0$ より

$$\frac{x+2}{x^2+4x+8}=\frac{1}{x+2+\frac{4}{x+2}}$$

と変形できる．

このとき $x+2>0$，$\frac{4}{x+2}>0$ であるので

$$x+2+\frac{4}{x+2}\geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{4}{x+2}}=4$$

等号は $x+2=\dfrac{4}{x+2}$ つまり $x=0$ のとき成立する.

よって

$$\frac{1}{x+2+\dfrac{4}{x+2}} \leqq \frac{1}{4}$$

より，求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ $(x=0$ のとき$)$

第 37 講　解と係数の関係

37　次の各問いに答えよ.

(1)　方程式 $x^2+bx+c=0$ の 2 解を α, β とする．定数 b, c と α, β の関係式を求めよ.

(2)　方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 解を α, β, γ とする．定数 b, c, d と α, β, γ の関係式を求めよ.

(3)　方程式 $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の 4 解を α, β, γ, δ とする．定数 b, c, d, e と α, β, γ, δ の関係式を求めよ.

【答】　(1) $\begin{cases}\alpha+\beta=-b\\ \alpha\beta=c\end{cases}$　(2) $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-b\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c\\ \alpha\beta\gamma=-d\end{cases}$　(3) $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=-b\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=c\\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-d\\ \alpha\beta\gamma\delta=e\end{cases}$

【解答】

(1)　$x^2+bx+c=0$ の 2 解が α, β より，この方程式は $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と因数分解される.

ここで，$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ となり，これが x^2+bx+c と恒等的に等しいので

$$-(\alpha+\beta)=b \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta=c$$

つまり $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha+\beta=-b}\\ \boldsymbol{\alpha\beta=c}\end{cases}$ を得る.

(2)　$x^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 解が α, β, γ より，この方程式は $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ と因数分解される.

ここで，$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$ となり，これが x^3+bx^2+cx+d と恒等的に等しいので

$$-(\alpha+\beta+\gamma)=b \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c \quad \text{かつ} \quad -\alpha\beta\gamma=d$$

つまり $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-b}\\ \boldsymbol{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c}\\ \boldsymbol{\alpha\beta\gamma=-d}\end{cases}$ を得る.

(3)　$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の 4 解が α, β, γ, δ より，
この方程式は $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=0$ と因数分解される.

ここで

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

$=x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta$

となり，これが $x^4+bx^3+cx^2+dx+e$ と恒等的に等しいので

$$-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=b \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=c$$
$$\text{かつ} \quad -(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)=d \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta\gamma\delta=e$$

つまり $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=-b \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=c \\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-d \\ \alpha\beta\gamma\delta=e \end{cases}$ を得る.

第 38 講　方程式・不等式の解

38　次の各問いに答えよ．ただし，a，b，c は実数とする．

(1)　x の方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解け．

(2)　x の方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもつ条件を求めよ．

(3)　x の不等式 $ax^2+bx+c>0$ を解け．

(4)　x の不等式 $ax^2+bx+c>0$ が実数解をもつ条件を求めよ．

【答】 (1)
$$\begin{cases} a\neq 0 \text{ のとき} & x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ a=0,\ b\neq 0 \text{ のとき} & x=-\dfrac{c}{b} \\ a=b=c=0 \text{ のとき} & x \text{ は任意} \\ a=b=0,\ c\neq 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \end{cases}$$

(2)「$a\neq 0$ かつ $b^2-4ac\geqq 0$」または「$a=0$ かつ $b\neq 0$」または「$a=b=c=0$」

(3)
$$\begin{cases} a=b=0,\ c\leqq 0 \text{ または } a<0,\ b^2-4ac\leqq 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a=b=0,\ c>0 \text{ または } a>0,\ b^2-4ac<0 \text{ のとき} & x \text{ はすべての実数} \\ a=0,\ b>0 \text{ のとき} & x>-\dfrac{c}{b} \\ a=0,\ b<0 \text{ のとき} & x<-\dfrac{c}{b} \\ a>0,\ b^2-4ac\geqq 0 \text{ のとき} & x<\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x>\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ a<0,\ b^2-4ac>0 \text{ のとき} & \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<x<\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

(4)「$a=0$ かつ $b\neq 0$」または「$a=b=0$ かつ $c>0$」または「$a>0$」
　または「$a<0$ かつ $b^2-4ac>0$」

【解答】

(1)　$a\neq 0$ のとき $ax^2+bx+c=0$ に解の公式を用いて $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a=0$ のとき $ax^2+bx+c=0$ は $bx=-c$ となるので

・$b\neq 0$ のとき，$x=-\dfrac{c}{b}$

・$b=-c=0$ のとき，x は任意

・$b=0$ かつ $c\neq 0$ のとき，x は解なし

以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{a\neq 0} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \\ \boldsymbol{a=0,\ b\neq 0} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{x=-\dfrac{c}{b}} \\ \boldsymbol{a=b=c=0} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{x} \textbf{ は任意} \\ \boldsymbol{a=b=0,\ c\neq 0} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{x} \textbf{ は解なし} \end{cases}$$

(2)　(1)の結果より，実数解をもつ条件は

「$a \neq 0$ かつ $b^2-4ac \geqq 0$」または「$a=0$ かつ $b \neq 0$」または「$a=b=c=0$」

(3)　(Ⅰ)　$a=0$ のとき

与えられた不等式は $bx+c>0$ となる．

・$b>0$ のとき，$x>-\dfrac{c}{b}$

・$b=0$ のとき，与えられた不等式は $c>0$ となるので，$c>0$ ならば x は任意，
$c \leqq 0$ ならば x は解なし

・$b<0$ のとき，$x<-\dfrac{c}{b}$

以下 $\alpha=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とする．

(Ⅱ)　$a>0$ のとき

$y=ax^2+bx+c$ のグラフが下に凸となることなどより

・$b^2-4ac<0$ のとき，x はすべての実数

・$b^2-4ac=0$ のとき，$x \neq -\dfrac{b}{2a}$

・$b^2-4ac>0$ のとき，$x<\alpha$，$x>\beta$

(Ⅲ)　$a<0$ のとき

$y=ax^2+bx+c$ のグラフが上に凸となることなどより

・$b^2-4ac \leqq 0$ のとき，x は解なし

・$b^2-4ac>0$ のとき，$\alpha<x<\beta$

以上より

$$\begin{cases} a=b=0,\ c \leqq 0 \text{ または } a<0,\ b^2-4ac \leqq 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a=b=0,\ c>0 \text{ または } a>0,\ b^2-4ac<0 \text{ のとき} & x \text{ はすべての実数} \\ a=0,\ b>0 \text{ のとき} & x>-\dfrac{c}{b} \\ a=0,\ b<0 \text{ のとき} & x<-\dfrac{c}{b} \\ a>0,\ b^2-4ac \geqq 0 \text{ のとき} & x<\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x>\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ a<0,\ b^2-4ac>0 \text{ のとき} & \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<x<\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

(4)　(3)の結果より，実数解をもつ条件は

「$a=0$ かつ $b \neq 0$」または「$a=b=0$ かつ $c>0$」または「$a>0$」
または「$a<0$ かつ $b^2-4ac>0$」

第 39 講　虚数と方程式

39　次の各問いに答えよ．ただし，i を虚数単位とする．

(1)　p，q を実数とするとき，$p+qi=0$ は $p=q=0$ と同値であることを示せ．

(2)　実数係数の 3 次方程式 $x^3+px^2+qx-10=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，p，q の値をそれぞれ求めよ．また，他の解をすべて求めよ．

(3)　x の方程式 $x^2-4ix+3-24i=0$ を解け．

【答】 (1) 略　(2) $p=-4$，$q=9$，他の解は 2，$1-2i$　(3) $x=-3-2i$，$3+6i$

【解答】

(1)　$qi=-p$ より $(qi)^2=(-p)^2$ ゆえに $-q^2=p^2$ となるが，p，q は実数より $p^2\geqq 0$，$q^2\geqq 0$ したがって $-q^2\leqq 0$ であるので，$-q^2=p^2$ が成り立つとき $p^2=0$ かつ $-q^2=0$ ゆえに $p=q=0$ となる．

逆に $p=q=0$ のとき，$p+qi=0$ は明らか．

以上より，p，q が実数のとき，$p+qi=0$ と $p=q=0$ は同値である．

(2)　$x^3+px^2+qx-10=0$ が $1+2i$ を解にもつので

$$(1+2i)^3+p(1+2i)^2+q(1+2i)-10=0$$
$$(-11-2i)+p(-3+4i)+q(1+2i)-10=0$$
$$(-3p+q-21)+(4p+2q-2)i=0$$

ここで p と q は実数より $-3p+q-21$ と $4p+2q-2$ は実数になるので $-3p+q-21=4p+2q-2=0$ よって $p=-4$，$q=9$

このとき，与式は $x^3-4x^2+9x-10=0$ すなわち $(x-2)(x^2-2x+5)=0$ となるので，$x=2$，$1\pm 2i$

以上より，$\boldsymbol{p=-4}$，$\boldsymbol{q=9}$　他の解は $\boldsymbol{2}$，$\boldsymbol{1-2i}$

(3)　$x^2-4ix+3-24i=0$ より $(x-2i)^2=-7+24i$ と変形できるが，$(3+4i)^2=-7+24i$ より $x-2i=\pm(3+4i)$

ゆえに $\boldsymbol{x=-3-2i}$，$\boldsymbol{3+6i}$

第 40 講　解の個数

40　次の各問いに答えよ．ただし，k は実数定数とする．

(1)　方程式 $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-k=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(2)　方程式 $\cos^2\theta+\sin\theta-k=0$ の異なる実数解の個数を $0\leqq\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ の場合において求めよ．

【答】

(1) $\begin{cases} 0 & (k<-1\text{ のとき}) \\ 2 & (k=-1,\ k>3\text{ のとき}) \\ 3 & (k=3\text{ のとき}) \\ 4 & (-1<k<3\text{ のとき}) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 0 & \left(k\leqq-1,\ k>\dfrac{5}{4}\text{ のとき}\right) \\ 1 & (-1<k<1\text{ のとき}) \\ 2 & \left(k=\dfrac{5}{4}\text{ のとき}\right) \\ 3 & (k=1\text{ のとき}) \\ 4 & \left(1<k<\dfrac{5}{4}\text{ のとき}\right) \end{cases}$

【解答】

(1)　$x^2+2x=t$ とおくと $t=(x+1)^2-1$ より，t の値に対する x の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 & (t<-1\text{ のとき}) \\ 1 & (t=-1\text{ のとき}) \\ 2 & (t>-1\text{ のとき}) \end{cases}$$

となり，$t^2-2t-k=0$ より $k=(t-1)^2-1$

ここで $u=k$ と $u=(t-1)^2-1$ のグラフの共有点の t 座標を考えると，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} \mathbf{0} & (\boldsymbol{k<-1}\textbf{ のとき}) \\ \mathbf{2} & (\boldsymbol{k=-1,\ k>3}\textbf{ のとき}) \\ \mathbf{3} & (\boldsymbol{k=3}\textbf{ のとき}) \\ \mathbf{4} & (\boldsymbol{-1<k<3}\textbf{ のとき}) \end{cases}$$

(2)　$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ より t の値に対する θ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 & (t\leqq-1,\ t>1\text{ のとき}) \\ 1 & (-1<t<0,\ t=1\text{ のとき}) \\ 2 & (0\leqq t<1\text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．

このとき与式は $-t^2+t+1=k$ より $k=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$

ここで $u=k$ と $u=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$ のグラフの共有点の t 座標を考えると，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 & \left(k \leqq -1,\ k > \dfrac{5}{4} \text{ のとき}\right) \\ 1 & (-1 < k < 1 \text{ のとき}) \\ 2 & \left(k = \dfrac{5}{4} \text{ のとき}\right) \\ 3 & (k = 1 \text{ のとき}) \\ 4 & \left(1 < k < \dfrac{5}{4} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

第 41 講　複数の変数の取り扱い

41　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x,\ y)=x^2+2xy+3y^2-2x+4y+6$ の最小値を求めよ．

(2)　$2x+y=3$ のとき $f(x,\ y)=x^2+2xy+3y^2$ の最小値を求めよ．

(3)　$x^2+y^2=4$ のとき $f(x,\ y)=x^2+2xy+3y^2$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(4)　$x^2+2xy+3y^2=4$ のとき $f(x,\ y)=2x+y$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(5)　$x^2+2xy+3y^2=4$ のとき $f(x,\ y)=x^2+y^2$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【答】 (1) 最小値 $\dfrac{1}{2}$ $\left(x=\dfrac{5}{2},\ y=-\dfrac{3}{2}\text{ のとき}\right)$　(2) 最小値 2 $\left(x=\dfrac{5}{3},\ y=-\dfrac{1}{3}\text{ のとき}\right)$

(3) 最大値 $8+4\sqrt{2}$ 〔$(x,\ y)=(\pm\sqrt{2-\sqrt{2}},\ \pm\sqrt{2+\sqrt{2}})$ のとき〕,

最小値 $8-4\sqrt{2}$ 〔$(x,\ y)=(\pm\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \mp\sqrt{2-\sqrt{2}})$ のとき〕（いずれも複号同順）

(4) 最大値 $3\sqrt{2}$ $\left(x=\dfrac{5\sqrt{2}}{3},\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\text{ のとき}\right)$，最小値 $-3\sqrt{2}$ $\left(x=-\dfrac{5\sqrt{2}}{3},\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\text{ のとき}\right)$

(5) 最大値 $2(2+\sqrt{2})$ 〔$(x,\ y)=(\pm(\sqrt{2}+1),\ \mp1)$ のとき〕,

最小値 $2(2-\sqrt{2})$ 〔$(x,\ y)=(\pm(\sqrt{2}-1),\ \pm1)$ のとき〕（いずれも複号同順）

【解答】

(1)　$f(x,\ y)=(x+y-1)^2+2y^2+6y+5=(x+y-1)^2+2\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$ となるので，

$x+y-1=0$ かつ $y+\dfrac{3}{2}=0$ つまり $x=\dfrac{5}{2}$，$y=-\dfrac{3}{2}$ のとき，**最小値 $\dfrac{1}{2}$** となる．

(2)　$2x+y=3$ より $y=3-2x$ であるので

$$\begin{aligned}f(x,\ 3-2x)&=x^2+2x(3-2x)+3(3-2x)^2\\&=9x^2-30x+27\\&=9\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+2\end{aligned}$$

となる．$x=\dfrac{5}{3}$ のとき $y=3-2x$ より $y=-\dfrac{1}{3}$ であるので，$x=\dfrac{5}{3}$，$y=-\dfrac{1}{3}$ のとき

最小値 2 となる．

(3)　$x^2+y^2=4$ より $(x,\ y)=(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける．

このとき

$$\begin{aligned}f(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)&=4\cos^2\theta+8\sin\theta\cos\theta+12\sin^2\theta\\&=4\times\frac{1+\cos2\theta}{2}+8\times\frac{\sin2\theta}{2}+12\times\frac{1-\cos2\theta}{2}\\&=4\sin2\theta-4\cos2\theta+8=4\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+8\end{aligned}$$

となる．ここで $-\dfrac{\pi}{4}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{15}{4}\pi$ より

$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{2}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{3}{8}\pi$，$\dfrac{11}{8}\pi$ のとき $f(x,\ y)$ は最大値 $8+4\sqrt{2}$ をとり，

$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{2}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{7}{8}\pi$，$\dfrac{15}{8}\pi$ のとき $f(x,\ y)$ は最小値 $8-4\sqrt{2}$ をとる．

$\sin^2\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{1-\cos\dfrac{3}{4}\pi}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ より $\sin\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$,

同様に $\cos\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ などより

$(x,\ y)=\left(\pm\sqrt{2-\sqrt{2}},\ \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$ のとき **最大値 $8+4\sqrt{2}$**,

$(x,\ y)=\left(\pm\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \mp\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$ のとき **最小値 $8-4\sqrt{2}$**（いずれも複号同順）となる.

(4)　$2x+y=k$ とおくと，$y=-2x+k$ となるので，この式の表す直線と $x^2+2xy+3y^2=4$ の表す図形が共有点をもてばよい.

つまり，直線の式を代入した式 $x^2+2x(-2x+k)+3(-2x+k)^2=4$ すなわち

$$9x^2-10kx+3k^2-4=0 \quad \cdots\cdots ①$$

が実数解をもつような k を考えればよいので

$(-5k)^2-9(3k^2-4)\geqq 0$ より $k^2\leqq 18$ ゆえに $-3\sqrt{2}\leqq k\leqq 3\sqrt{2}$

$k=3\sqrt{2}$ のとき, ①より $x=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$, このとき $y=-2x+k=-2\times\dfrac{5\sqrt{2}}{3}+3\sqrt{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

となり, $k=-3\sqrt{2}$ のとき, ①と $y=-2x+k$ より同様に $x=-\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ となる.

以上より，$x=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$，$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき **最大値 $3\sqrt{2}$**,

$x=-\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき **最小値 $-3\sqrt{2}$** となる.

(5)　$x^2+2xy+3y^2=4$ より $x^2+y^2\neq 0$ であるので，$x^2+y^2=k$ とおくと，この式は中心 $(0,\ 0)$，半径 $\sqrt{k}$ の円を表すので，$(x,\ y)=(\sqrt{k}\cos\theta,\ \sqrt{k}\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と表せる.

この円と $x^2+2xy+3y^2=4$ の表す図形が共有点をもてばよいということは,

$(x,\ y)=(\sqrt{k}\cos\theta,\ \sqrt{k}\sin\theta)$ を代入した式

$$k\cos^2\theta+2k\sin\theta\cos\theta+3k\sin^2\theta=4 \quad \cdots\cdots ②$$

が $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲に実数解をもつような k を考えればよいが，(3)と同様の変形で

$k\cos^2\theta+2k\sin\theta\cos\theta+3k\sin^2\theta=k\left\{\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\right\}$ となり,

$\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+2>0$ より②は $k=\dfrac{4}{\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+2}$ と変形できる.

このとき，右辺の分母は(3)と同様にして $(x,\ y)=(\pm(\sqrt{2}+1),\ \pm 1)$ のときに最大値

$2+\sqrt{2}=\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$ をとり，$(x,\ y)=(\pm(\sqrt{2}-1),\ \mp 1)$ のときに最小値

$2-\sqrt{2}=\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}$ をとるので,

$(x,\ y)=(\pm(\sqrt{2}+1),\ \mp 1)$ のとき **最大値 $2(2+\sqrt{2})$**,

$(x,\ y)=(\pm(\sqrt{2}-1),\ \pm 1)$ のとき **最小値 $2(2-\sqrt{2})$**（いずれも複号同順）となる.

第 42 講　無理数の証明

42　次の各問いに答えよ．

(1)　$\sqrt{7}$ が無理数であることを示せ．

(2)　$\log_3 5$ が無理数であることを示せ．

(3)　$\sqrt[3]{5}$ が無理数であることを示せ．また，$\sqrt[3]{5}$ は有理数係数の 2 次方程式の解になれないことを示せ．

【答】　略

【解答】

(1)　$\sqrt{7}$ が有理数，つまり $\sqrt{7}=\dfrac{m}{l}$（ただし，l と m は互いに素な自然数）と仮定すると，

$\sqrt{7}=\dfrac{m}{l}$ より $\sqrt{7}\,l=m$ であるので，これを 2 乗して $7l^2=m^2$ を得る．

ここで，l は自然数より l^2 は整数，つまり $7l^2$ は 7 の倍数となる．

また整数 k を用いて

$$(7k)^2=7\cdot 7k^2$$
$$(7k\pm1)^2=7(7k^2\pm2k)+1$$
$$(7k\pm2)^2=7(7k^2\pm4k)+4$$
$$(7k\pm3)^2=7(7k^2\pm6k+1)+2$$

となるので，整数を 2 乗したものが 7 の倍数になるのは，その整数が 7 の倍数のときに限る．

よって $7l^2=m^2$ が 7 の倍数より，$m=7k$ と表せる．このとき $7l^2=m^2$ は $7l^2=49k^2$ つまり $l^2=7k^2$ となり，$7k^2$ は 7 の倍数であるので，同様に l は 7 の倍数．これは l と m が互いに素であることに矛盾する．

ゆえに $\sqrt{7}$ は有理数ではない．つまり無理数である．

(2)　$\log_3 5$ が有理数，つまり $\log_3 5=\dfrac{m}{l}$（ただし，l と m は互いに素な自然数）と仮定すると，$3^{\frac{m}{l}}=5$ よりこれを l 乗して $3^m=5^l$ を得る．

ここで左辺は 3 だけを因数にもつ整数で右辺は 5 だけを因数にもつ整数であるので，これらが等しくなることはない．

よって $\log_3 5$ は有理数ではない．つまり無理数である．

(3)　$\sqrt[3]{5}$ が有理数，つまり $\sqrt[3]{5}=\dfrac{m}{l}$（ただし，l と m は互いに素な自然数）と仮定すると，

$\sqrt[3]{5}=\dfrac{m}{l}$ より $\sqrt[3]{5}\,l=m$ であるので，これを 3 乗して $5l^3=m^3$ を得る．

ここで，l は自然数より l^3 は整数，つまり $5l^3$ は 5 の倍数となる．

また整数 k を用いて

$(5k)^3=5\cdot25k^3$

$(5k\pm1)^3=5(25k^3\pm15k^2+3k)\pm1$

$(5k\pm2)^3=5(25k^3\pm30k^2+12k\pm1)\pm3$

となるので，整数を 3 乗したものが 5 の倍数になるのは，その整数が 5 の倍数のときに限る．

よって $5l^3=m^3$ が 5 の倍数より，$m=5k$ と表せる．このとき $5l^3=m^3$ は $5l^3=125k^3$ つまり $l^3=25k^3$ となり，$25k^3$ は 5 の倍数であるので，同様に l は 5 の倍数．これは l と m が互いに素であることに矛盾する．

ゆえに $\sqrt[3]{5}$ は有理数ではない．つまり無理数である．

次に $\sqrt[3]{5}$ が p，q を有理数とする $x^2+px+q=0$ の解であると仮定すると，

$(\sqrt[3]{5})^2+p\sqrt[3]{5}+q=0$　……①　が成立する．

ここで $5=(\sqrt[3]{5})^3=(\sqrt[3]{5}-p)\{(\sqrt[3]{5})^2+p\sqrt[3]{5}+q\}+(p^2-q)\sqrt[3]{5}+pq$ となるが，①を用いると $5=(p^2-q)\sqrt[3]{5}+pq$ より $(p^2-q)\sqrt[3]{5}=5-pq$ となる．ここで $p^2-q\neq0$ とすると $\sqrt[3]{5}=\dfrac{5-pq}{p^2-q}$ となるが，左辺は無理数，右辺は有理数であるので，矛盾．また，$p^2-q=0$ すなわち $q=p^2$ であるとすると，$5=pq=p\cdot p^2=p^3$ したがって $p=\sqrt[3]{5}$ となり p が有理数であることに矛盾する．

よって $\sqrt[3]{5}$ が有理数係数の 2 次方程式の解になることはない．

第 43 講　因数定理・剰余の定理

43　x の整式 $f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りが $2x-3$，$(x-1)^2$ で割ったときの余りが $2x+1$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りが $f(\alpha)$ となることを示せ．

(2)　$f(x)$ を $x-1$，$x-2$，$x-3$ で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．

(3)　$f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ．

(4)　$f(x)$ を $(x-1)^2(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ．

【答】 (1) 略　(2) 順に 3，1，3　(3) $-2x+5$　(4) $-x^2+4x$

【解答】

(1)　$f(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする．$x-\alpha$ で割ったときの余りは定数であるので，このときの余りは r（定数）とおける．

このとき

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+r$$

と表せるので，$x=\alpha$ を代入することで $r=f(\alpha)$ を得る．

(2)　剰余の定理より，$f(x)$ を $x-1$，$x-2$，$x-3$ で割ったときの余りはそれぞれ $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$ である．

$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$，$(x-1)^2$ で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とすると

$$f(x)=(x-2)(x-3)Q_1(x)+2x-3 \quad \cdots\cdots①$$

$$f(x)=(x-1)^2Q_2(x)+2x+1 \quad \cdots\cdots②$$

②に $x=1$ を代入して $f(1)=\mathbf{3}$

①に $x=2$，3 を代入して $f(2)=\mathbf{1}$，$f(3)=\mathbf{3}$

(3)　$f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$ とおく．$(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは 1 次以下の式であるので，このときの余りは $ax+b$（a，b を定数とする）とおける．

このとき，$f(x)=(x-1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$ と表せるので，$x=1$，2 を代入して $f(1)=a+b$，$f(2)=2a+b$ を得る．

これらと(2)の結果より $a+b=3$，$2a+b=1$ ゆえに $a=-2$，$b=5$

よって求める余りは $\boldsymbol{-2x+5}$

(4)　$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $2x+1$ より，定数 r と整式 $Q(x)$ を用いて

$$f(x)=(x-1)^2(x-3)Q(x)+r(x-1)^2+2x+1$$

と表せる．

$x=3$ を代入して $f(3)=4r+7$

(2)の結果より $f(3)=3$ であるので，$r=-1$

よって求める余りは $-1(x-1)^2+2x+1=\boldsymbol{-x^2+4x}$

第44講　$A=BQ+R$ について

> **44**　次の各問いに答えよ．
> (1)　$\{(x+1)(x-2)(x^2-x+2)\}^2$ を x^3+1 で割ったときの余りを求めよ．
> (2)　m, n を正の整数とするとき，$x^{3m}+1$ を x^3-1 で割ったときの余りを求めよ．また，x^n+1 を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ．
> (3)　$f(x)=x^n$（n は自然数）とする．$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ．
> (4)　$f(x)=x^n$（n は自然数）とする．$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ったときの余りを求めよ．また，$(x-2)^3$ で割ったときの余りを求めよ．

【答】 (1) $-3x^2+3x+6$　(2) 順に 2, $\begin{cases} 2 & (n=3k \text{ のとき}) \\ x+1 & (n=3k+1 \text{ のとき}) \\ -x & (n=3k+2 \text{ のとき}) \end{cases}$ （k は整数）

(3) $(3^n-2^n)x+3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$

(4) 順に $n\cdot 2^{n-1}x-(n-1)2^n$，$n(n-1)2^{n-3}x^2-n(n-2)2^{n-1}x+(n-1)(n-2)2^{n-1}$

【解答】

(1)　与式について

$$\begin{aligned}(x+1)(x-2)(x^2-x+2)&=(x+1)(x-2)\{(x^2-x+1)+1\}\\&=(x-2)\{(x^3+1)+(x+1)\}\\&=(x^3+1)(x-2)+(x-2)(x+1)\\&=(x^3+1)(x-2)+x^2-x-2\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}&\{(x+1)(x-2)(x^2-x+2)\}^2\\&=(x^3+1)^2(x-2)^2+2(x-2)^2(x+1)(x^3+1)+(x^2-x-2)^2\\&=(x^3+1)\{(x^3+1)(x-2)^2+2(x-2)^2(x+1)+(x-2)\}-3x^2+3x+6\end{aligned}$$

よって与式を x^3+1 で割ったときの余りは

$$\boldsymbol{-3x^2+3x+6}$$

(2)　与式は

$$\begin{aligned}x^{3m}+1&=x^{3m}-1+2\\&=(x^3-1)(x^{3m-3}+x^{3m-6}+\cdots\cdots+x^3+1)+2\end{aligned}$$

と変形できるので，$x^{3m}+1$ を x^3-1 で割ったときの余りは **2**

以下，x^n+1 を x^2+x+1 で割ったときの余りを考える．

(I)　$n=3m$ のとき，$x^{3m}+1$ を x^3-1 で割ったときの余りは 2 より，整式 $Q(x)$ を用いて $x^{3m}+1=(x^3-1)Q(x)+2$ と表せ，$x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)$ より

$$x^{3m}+1=(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+2$$

よって余りは 2

(Ⅱ)　$n=3m+1$ のとき，(Ⅰ)を利用すると

$$\begin{aligned}x^{3m+1}+1&=x(x^{3m}+1)-x+1\\&=x\{(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+2\}-x+1\\&=(x^2+x+1)x(x-1)Q(x)+x+1\end{aligned}$$

よって余りは $x+1$（これは $n=1$ つまり $m=0$ のときにも成り立つ）

(Ⅲ)　$n=3m+2$ のとき

$$\begin{aligned}x^{3m+2}+1&=x^2(x^{3m}+1)-x^2+1\\&=x^2\{(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+2\}-x^2+1\\&=(x^2+x+1)x^2(x-1)Q(x)+x^2+1\\&=(x^2+x+1)x^2(x-1)Q(x)+x^2+x+1-x\\&=(x^2+x+1)\{x^2(x-1)Q(x)+1\}-x\end{aligned}$$

よって余りは $-x$（これは $n=2$ つまり $m=0$ のときにも成り立つ）

以上より，**k を整数**として求める余りは

$$\begin{cases}\mathbf{2} & (\boldsymbol{n=3k}\ \text{のとき})\\ \boldsymbol{x+1} & (\boldsymbol{n=3k+1}\ \text{のとき})\\ \boldsymbol{-x} & (\boldsymbol{n=3k+2}\ \text{のとき})\end{cases}$$

(3)　$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする．$(x-2)(x-3)$ は2次式であるから，余りは1次以下となるので，定数 a，b を用いて
$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$ と表せる．

このとき，$f(2)=2^n=2a+b$，$f(3)=3^n=3a+b$ より $a=3^n-2^n$，$b=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$ となるので，求める余りは $\boldsymbol{(3^n-2^n)x+3\cdot 2^n-2\cdot 3^n}$

(4)　二項展開を用いると

$$\begin{aligned}f(x)&=x^n=\{(x-2)+2\}^n\\&={}_n\mathrm{C}_n(x-2)^n+{}_n\mathrm{C}_{n-1}(x-2)^{n-1}\cdot 2+{}_n\mathrm{C}_{n-2}(x-2)^{n-2}\cdot 2^2+\\&\qquad\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_3(x-2)^3\cdot 2^{n-3}+{}_n\mathrm{C}_2(x-2)^2\cdot 2^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1(x-2)\cdot 2^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_0 2^n\end{aligned}$$

が成り立つ．

$n\geqq 2$ のとき

$${}_n\mathrm{C}_n(x-2)^n+{}_n\mathrm{C}_{n-1}(x-2)^{n-1}\cdot 2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_3(x-2)^3\cdot 2^{n-3}+{}_n\mathrm{C}_2(x-2)^2\cdot 2^{n-2}$$

の部分は $(x-2)^2$ で割り切れるので，$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ったときの余りは

$${}_n\mathrm{C}_1(x-2)\cdot 2^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_0 2^n=\boldsymbol{n\cdot 2^{n-1}x-(n-1)2^n}$$

（これは $n=1$ のときにも成り立つ）

$n\geqq 3$ のとき

$${}_n\mathrm{C}_n(x-2)^n+{}_n\mathrm{C}_{n-1}(x-2)^{n-1}\cdot 2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_3(x-2)^3\cdot 2^{n-3}$$

の部分は $(x-2)^3$ で割り切れるので，$f(x)$ を $(x-2)^3$ で割ったときの余りは

$$\begin{aligned}&{}_n\mathrm{C}_2(x-2)^2\cdot 2^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1(x-2)\cdot 2^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_0 2^n\\&=\boldsymbol{n(n-1)2^{n-3}x^2-n(n-2)2^{n-1}x+(n-1)(n-2)2^{n-1}}\end{aligned}$$

（これは $n=1$，2のときにも成り立つ）

第 45 講　整数問題の攻め方 その１

45　変数はすべて整数として，次の各問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$，$0<x\leqq y$ を満たす x，y をすべて求めよ．

(2)　$\sqrt{n^2-12n+180}$ が自然数となるような n をすべて求めよ．

(3)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ を満たす x，y，z をすべて求めよ．

【答】 (1) $(x,\ y)=(5,\ 20),\ (6,\ 12),\ (8,\ 8)$

(2) $n=-29,\ -10,\ -3,\ 1,\ 6,\ 11,\ 15,\ 22,\ 41$

(3) $(x,\ y,\ z)=(3,\ 7,\ 42),\ (3,\ 42,\ 7),\ (7,\ 3,\ 42),\ (7,\ 42,\ 3),\ (42,\ 3,\ 7),\ (42,\ 7,\ 3),$

$(3,\ 8,\ 24),\ (3,\ 24,\ 8),\ (8,\ 3,\ 24),\ (8,\ 24,\ 3),\ (24,\ 3,\ 8),\ (24,\ 8,\ 3),$

$(3,\ 9,\ 18),\ (3,\ 18,\ 9),\ (9,\ 3,\ 18),\ (9,\ 18,\ 3),\ (18,\ 3,\ 9),\ (18,\ 9,\ 3),$

$(3,\ 10,\ 15),\ (3,\ 15,\ 10),\ (10,\ 3,\ 15),\ (10,\ 15,\ 3),\ (15,\ 3,\ 10),\ (15,\ 10,\ 3),$

$(3,\ 12,\ 12),\ (12,\ 12,\ 3),\ (12,\ 3,\ 12),$

$(4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 20,\ 5),\ (5,\ 4,\ 20),\ (5,\ 20,\ 4),\ (20,\ 4,\ 5),\ (20,\ 5,\ 4),$

$(4,\ 6,\ 12),\ (4,\ 12,\ 6),\ (6,\ 4,\ 12),\ (6,\ 12,\ 4),\ (12,\ 4,\ 6),\ (12,\ 6,\ 4),$

$(4,\ 8,\ 8),\ (8,\ 8,\ 4),\ (8,\ 4,\ 8),$

$(5,\ 5,\ 10),\ (5,\ 10,\ 5),\ (10,\ 5,\ 5),$

$(6,\ 6,\ 6)$

【解答】

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ より $4y+4x=xy$　ゆえに $(x-4)(y-4)=16$　……①　と変形できる．

ここで $0<x\leqq y$ より $-4<x-4\leqq y-4$ であるので，①を満たすものは

$$(x-4,\ y-4)=(1,\ 16),\ (2,\ 8),\ (4,\ 4)$$

に限る．

よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(5,\ 20),\ (6,\ 12),\ (8,\ 8)}$

(2)　m を自然数とすると　$\sqrt{n^2-12n+180}=\sqrt{(n-6)^2+144}=m$ とおける．

これより $144=m^2-(n-6)^2$　ゆえに $144=\{m-(n-6)\}\{m+(n-6)\}$

これを満たすものは

$$(m,\ n-6)=(37,\ \pm35),\ (20,\ \pm16),\ (15,\ \pm9),\ (13,\ \pm5),\ (12,\ 0)$$

に限る．

よって　$\boldsymbol{n=-29,\ -10,\ -3,\ 1,\ 6,\ 11,\ 15,\ 22,\ 41}$

(3)　まずは $(0<)x\leqq y\leqq z$ となるものを考える．このとき $\dfrac{1}{x}\geqq\dfrac{1}{y}\geqq\dfrac{1}{z}$ である．

ここで $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{3}{x}$ より $x\leqq6$ を得る．

$x=1,\ 2$ のとき

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geqq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ となり，これらを満たす自然数 y，z は存在しない．

$x=3$ のとき

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ より $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$　ゆえに $(y-6)(z-6)=36$

ここで $3\leqq y\leqq z$ より $-3\leqq y-6\leqq z-6$ となるので，

$(y-6,\ z-6)=(1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9),\ (6,\ 6)$

よって $(y,\ z)=(7,\ 42),\ (8,\ 24),\ (9,\ 18),\ (10,\ 15),\ (12,\ 12)$

$x=4$ のとき

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ より $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$　ゆえに $(y-4)(z-4)=16$

ここで $4\leqq y\leqq z$ より $0\leqq y-4\leqq z-4$ となるので，(1)と同様に

$(y,\ z)=(5,\ 20),\ (6,\ 12),\ (8,\ 8)$

$x=5$ のとき

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{5}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ より $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$　ゆえに $(3y-10)(3z-10)=100$

ここで $5\leqq y\leqq z$ より $5\leqq 3y-10\leqq 3z-10$ であり，$3y-10=3(y-4)+2$ より $3y-10$ は3で割ると2余る数であるから $(3y-10,\ 3z-10)=(5,\ 20)$

よって $(y,\ z)=(5,\ 10)$

$x=6$ のとき

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ より $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$　ゆえに $(y-3)(z-3)=9$

ここで $6\leqq y\leqq z$ より $3\leqq y-3\leqq z-3$ となるので，$(y-3,\ z-3)=(3,\ 3)$

よって $(y,\ z)=(6,\ 6)$

以上より，$x\leqq y\leqq z$ ではない場合の解も考えると

$(x,\ y,\ z)=(3,\ 7,\ 42),\ (3,\ 42,\ 7),\ (7,\ 3,\ 42),\ (7,\ 42,\ 3),\ (42,\ 3,\ 7),\ (42,\ 7,\ 3),$

$(3,\ 8,\ 24),\ (3,\ 24,\ 8),\ (8,\ 3,\ 24),\ (8,\ 24,\ 3),\ (24,\ 3,\ 8),\ (24,\ 8,\ 3),$

$(3,\ 9,\ 18),\ (3,\ 18,\ 9),\ (9,\ 3,\ 18),\ (9,\ 18,\ 3),\ (18,\ 3,\ 9),\ (18,\ 9,\ 3),$

$(3,\ 10,\ 15),\ (3,\ 15,\ 10),\ (10,\ 3,\ 15),\ (10,\ 15,\ 3),\ (15,\ 3,\ 10),\ (15,\ 10,\ 3),$

$(3,\ 12,\ 12),\ (12,\ 12,\ 3),\ (12,\ 3,\ 12),$

$(4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 20,\ 5),\ (5,\ 4,\ 20),\ (5,\ 20,\ 4),\ (20,\ 4,\ 5),\ (20,\ 5,\ 4),$

$(4,\ 6,\ 12),\ (4,\ 12,\ 6),\ (6,\ 4,\ 12),\ (6,\ 12,\ 4),\ (12,\ 4,\ 6),\ (12,\ 6,\ 4),$

$(4,\ 8,\ 8),\ (8,\ 8,\ 4),\ (8,\ 4,\ 8),$

$(5,\ 5,\ 10),\ (5,\ 10,\ 5),\ (10,\ 5,\ 5),$

$(6,\ 6,\ 6)$

第 46 講　整数問題の攻め方 その2

46 次の各問いに答えよ．

(1) a，b，q，r を整数とし

$$a=bq+r,\quad b>0,\quad 0\leqq r<b$$

を満たしているとする．このとき a，b の最大公約数 G_1 と b，r の最大公約数 G_2 は等しいことを示せ．また，このことを用いて，3718 と 4914 の最大公約数を求めよ．

(2) $12x+5y=2199$ を満たす整数 x，y をすべて求めよ．

(3) 2つの集合 $A=\{3m+5n \mid m と n は整数\}$，$B=\{2k+7l \mid k と l は整数\}$ について，$A=B$ であることを示せ．

【答】 (1) 最大公約数は 26　(2) $(x,\ y)=(5k+2,\ 435-12k)$ （k は整数）　(3) 略

【解答】

(1) a と b の最大公約数が G_1 より

$$\begin{cases} a=\alpha G_1 \\ b=\beta G_1 \end{cases} \quad (\alpha,\ \beta は互いに素な整数)$$

と表せる．このとき $\alpha G_1=\beta G_1 q+r$ より $r=(\alpha-\beta q)G_1$ であるので G_1 は r の約数．

また G_1 は b の約数でもあるので，G_1 は b と r の公約数．よって $G_1\leqq G_2$ ……①

b と r の最大公約数が G_2 より

$$\begin{cases} b=xG_2 \\ r=yG_2 \end{cases} \quad (x,\ y は互いに素な整数)$$

と表せる．このとき $a=xG_2q+yG_2=(xq+y)G_2$ であるので G_2 は a の約数．

また G_2 は b の約数でもあるので，G_2 は a と b の公約数．よって $G_1\geqq G_2$ ……②

①と②より $G_1=G_2$

また

$$4914=3718\cdot1+1196 \qquad 1196=130\cdot9+26$$
$$3718=1196\cdot3+130 \qquad 130=26\cdot5$$

より，3718 と 4914 の最大公約数は 130 と 26 の最大公約数，つまり **26** に等しい．

(2) 与式は $12(x-2)=-5(y-435)$ と変形できる．ここで 12 と 5 は互いに素であるので，この式は整数 k を用いて $12\times5\times k=60k$ と表すことができる．

よって $12(x-2)=-5(y-435)=60k$ より $\boldsymbol{(x,\ y)=(5k+2,\ 435-12k)}$ **（k は整数）**

(3) m，n を整数として

$$3m+5n=2(-n-2m)+7(m+n)$$

で $-n-2m$ と $m+n$ は整数より $A\subset B$ ……①

また k，l を整数として

$$2k+7l=3(-k-l)+5(2l+k)$$

で $-k-l$ と $2l+k$ は整数より $A\supset B$ ……②

①と②より $A=B$

第 47 講　p 進法

47　10 進法で「10」と表される数を 2 進法では「1010」と表すことができるが，10 進法での「1010」と区別するため，10 進法以外は添字をつけて表す場合が多い．例えば，10 進法で「10」は 2 進法では「$1010_{(2)}$」，5 進法では「$20_{(5)}$」という具合に表現できる．

(1)　$10101_{(2)}$ を 3 進法で表せ．

(2)　$123_{(4)}+301_{(4)}$，$123_{(4)}\times301_{(4)}$，$123_{(4)}-301_{(4)}$ を計算せよ．

(3)　5 進法で表したとき 3 桁のある数は，3 つある各位の数字の 2 つが入れ替わったところ，もとの数の 2 倍になったという．もとの数を求めよ．

【答】 (1) $210_{(3)}$　(2) 順に $1030_{(4)}$，$110223_{(4)}$，$-112_{(4)}$　(3) $143_{(5)}$ と $130_{(5)}$

【解答】

(1)　$1\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0=16+0+4+0+1=21=2\cdot3^2+1\cdot3^1+0\cdot3^0$ より

$10101_{(2)}$ を 3 進法で表すと $\mathbf{210_{(3)}}$

(2)　$123_{(4)}+301_{(4)}=\mathbf{1030_{(4)}}$，$123_{(4)}\times301_{(4)}=\mathbf{110223_{(4)}}$，$123_{(4)}-301_{(4)}=\mathbf{-112_{(4)}}$

(3)　求める整数は 10 進法では $a\cdot5^2+b\cdot5^1+c\cdot5^0$ と表せる．

ここで，a は 4 以下の自然数，b と c は 0 以上 4 以下の整数である．

(Ⅰ)　5^1 の位と 5^0 の位が入れ替わったとすると

$$a\cdot5^2+c\cdot5^1+b\cdot5^0=2\times(a\cdot5^2+b\cdot5^1+c\cdot5^0)\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つはずであるが，

$2\times(a\cdot5^2+b\cdot5^1+c\cdot5^0)\geqq2a\cdot5^2$，$a\cdot5^2+c\cdot5^1+b\cdot5^0<(a+1)\cdot5^2$ で，

$2a-(a+1)=a-1\geqq0$ であるから①が成立することはない．

(Ⅱ)　5^2 の位と 5^0 の位が入れ替わったとすると

$$c\cdot5^2+b\cdot5^1+a\cdot5^0=2\times(a\cdot5^2+b\cdot5^1+c\cdot5^0)\quad\cdots\cdots②$$

が成り立つ．

ここで $1\leqq a\leqq4$ であるが，②の右辺は 3 桁であるので，繰り上がりを考えても $2a\leqq4$ であることが必要．つまり $a=1$，2 となる．また，左辺は 3 桁であるので $c\neq0$

(i)　$a=1$ のとき

②は $c\cdot5^2+b\cdot5^1+1\cdot5^0=2\cdot5^2+2b\cdot5^1+2c\cdot5^0$ となるが，5^0 の位に注目すると，

$1\leqq c\leqq4$ より $2c=6$ ゆえに $c=3$

このとき，②は

$$3\cdot5^2+b\cdot5^1+1\cdot5^0=2\cdot5^2+2b\cdot5^1+6\cdot5^0=2\cdot5^2+(2b+1)\cdot5^1+1\cdot5^0$$

となるので，$(2b+1)-5=b$ ゆえに $b=4$

よって $a=1$，$b=4$，$c=3$

(ii)　$a=2$ のとき

②は $c\cdot5^2+b\cdot5^1+2\cdot5^0=4\cdot5^2+2b\cdot5^1+2c\cdot5^0$ となるが，5^0 の位に注目すると，

$1\leqq c\leqq4$ より $2c=2$ ゆえに $c=1$

このとき，②は

$$1\cdot5^2+b\cdot5^1+2\cdot5^0=4\cdot5^2+2b\cdot5^1+2\cdot5^0$$

となるが，5^2 の位に注目すると，これが成立することはない.

(Ⅲ)　5^2 の位と 5^1 の位が入れ替わったとすると

$$b\cdot 5^2+a\cdot 5^1+c\cdot 5^0=2\times(a\cdot 5^2+b\cdot 5^1+c\cdot 5^0) \quad \cdots\cdots③$$

が成り立つ.

(Ⅱ)と同様に $a=1,\ 2$

ここで 5^0 の位に注目すると，$0\leqq c\leqq 4$ より $2c=c$ ゆえに $c=0$

このとき③は

$$b\cdot 5^2+a\cdot 5^1+0\cdot 5^0=2a\cdot 5^2+2b\cdot 5^1+0\cdot 5^0$$

すなわち $b=3a$ が成り立つ.

(i)　$a=1$ のとき，③は $b=3$

よって $a=1,\ b=3,\ c=0$

(ii)　$a=2$ のとき，③は $b=6$ となり不適.

以上より，求める数は $\mathbf{143}_{(5)}$ と $\mathbf{130}_{(5)}$

第 48 講　必要十分条件

48　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の曲線 $y=a(x-b)^2+c$ を考える．ただし，a，b，c は実数の定数で $a\neq 0$ とする．この曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線が x 軸と交点をもつとき，その交点を $(f(p),\ 0)$ とする．$f(p)$ が p の 1 次関数になるための a，b，c の必要十分条件を求めよ．

(2)　自然数 n の約数の個数を d とする．n の約数すべてを小さい順に並べて得られる数列を a_k $(1\leqq k\leqq d)$ とする．したがって，$a_1=1$，$a_d=n$，$a_k<a_{k+1}$ $(1\leqq k<d)$ である．このとき，n に対する次の 2 つの条件(イ)，(ロ)は互いに同値〔(イ) $\Longleftrightarrow$ (ロ)〕であることを示せ．

(イ)　n は 60 の倍数である．

(ロ)　n は 6 個以上の約数をもち，$\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_6}=\dfrac{1}{a_2}$ となる．

【答】 (1) $c=0$　(2) 略

【解答】

(1)　$y=a(x-b)^2+c$ のとき $y'=2a(x-b)$ より $x=p$ における接線は

$$y=2a(p-b)(x-p)+a(p-b)^2+c$$

$$\therefore\quad y=2a(p-b)x-ap^2+ab^2+c \quad \cdots\cdots①$$

$p=b$ のときは接線は $y=c$ となり，x 軸と平行または一致することになるので不適．

$p\neq b$ のとき①が点 $(f(p),\ 0)$ を通るので

$$0=2a(p-b)f(p)-ap^2+ab^2+c$$

$$f(p)=\frac{p+b}{2}-\frac{c}{2a(p-b)}$$

これが p の 1 次関数となるので，$c=0$

逆に $c=0$ のとき，与えられた曲線は $y=a(x-b)^2$ となり，$y'=2a(x-b)$ より $x=p$ における接線は

$$y=2a(p-b)(x-p)+a(p-b)^2$$

$$\therefore\quad y=2a(p-b)x-ap^2+ab^2$$

これと $y=0$ とを連立して，$2a(p-b)x-ap^2+ab^2=0$ より，これがただ 1 つの実数解をもつには $p\neq b$ であるので $x=\dfrac{p+b}{2}$ となり，$f(p)$ は p の 1 次関数となっている．

よって，求める条件は $\boldsymbol{c=0}$

(2)　n が 60 の倍数であるときは n は $60=2^2\times 3\times 5$ を因数にもつので，n の約数に

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

は含まれる．よって

$$a_2=2,\ a_3=3,\ a_6=6$$

であり

$$\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}=\frac{1}{a_2}$$

ゆえに(イ) $\Longrightarrow$ (ロ)が示された.

次に $\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_6}=\dfrac{1}{a_2}$ より

$$a_2(a_6+a_3)=a_3a_6$$

のときを考える.

ここで a_2 を 3 以上の奇数とすると，a_3 と a_6 は奇数より左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾．よって a_2 は偶数．このとき，a_2 を 4 以上の偶数とすると，4 の約数である 2 が $\{a_n\}$ に含まれないことになるので矛盾．ゆえに $a_2=2$

このとき $a_2(a_6+a_3)=a_3a_6$ は $(a_3-2)(a_6-2)=4$ と変形できるが，$2<a_3<a_6$ より $0<a_3-2<a_6-2$ となるので，$a_3-2=1$，$a_6-2=4$，つまり $a_3=3$，$a_6=6$ となる.

したがって $a_4=4$，$a_5=5$ より n は 2，3，4，5，6 を約数にもつので少なくとも n は $2^2\times3\times5=60$ を因数にもつ.

ゆえに(ロ) $\Longrightarrow$ (イ)が示された.

第49講　期待値

49　次の各問いに答えよ．

［A］　半径1の円に内接する正八角形ABCDEFGHを考える．この8個の頂点から同時に3点を選び三角形をつくるとき，三角形の面積の期待値を求めよ．

［B］　サイコロを n 回振って出た目の和を2乗した値を S_n とし，S_n の期待値を E_n とする．

(1)　E_2 を求めよ．　　(2)　E_n を求めよ．

【答】　［A］　$\dfrac{2\sqrt{2}+2}{7}$　　［B］　(1)　$\dfrac{329}{6}$　(2)　$\dfrac{49}{4}n^2+\dfrac{35}{12}n$

【解答】

［A］　8点から3点を選ぶ選び方は

$${}_8C_3=56\text{ 通り}$$

である．また，円の中心をOとして，OAにBから下ろした垂線の足をIとするとき

$OI=BI=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であることより $AB=\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ となる．

(A)　三角形が正八角形と2辺を共有する場合

頂角の選び方は8通りより，その確率は $\dfrac{8}{56}=\dfrac{1}{7}$ である．

$\triangle ABH$ において，$\angle BAH=180^\circ-\angle BEH=180^\circ-\dfrac{1}{2}\times\angle BOH=135^\circ$ より，その面積は $\dfrac{1}{2}\times AB\times AH\times\sin 135^\circ=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ である．

(B)　三角形が正八角形と1辺だけを共有し直角三角形ではない場合

例えばABだけ共有し直角三角形ではないものは $\triangle ABD$ と $\triangle ABG$ の2通りより，その確率は $\dfrac{2\times 8}{56}=\dfrac{2}{7}$ である．

$\triangle ABD$ において，$BD=\sqrt{2}$，$BI=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，その面積は $\dfrac{1}{2}\times BD\times BI=\dfrac{1}{2}$

(C)　三角形が正八角形と1辺だけを共有し直角三角形となる場合

例えばABだけ共有し直角三角形となるものは $\triangle ABE$ と $\triangle ABF$ の2通りより，その確率は $\dfrac{2\times 8}{56}=\dfrac{2}{7}$ である．

$\triangle ABE$ において，$AE=2$，$BI=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，その面積は $\dfrac{1}{2}\times AE\times BI=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(D)　三角形が正八角形と1辺も共有せず直角三角形となる場合

例えば $\angle A$ が直角の直角三角形となるものは $\triangle ACG$ の1通りより，その確率は $\dfrac{8}{56}=\dfrac{1}{7}$ である．

$\triangle ACG$ において，$AC=AG=\sqrt{2}$ より，その面積は $\dfrac{1}{2}\times AC\times AG=1$

(E)　三角形が正八角形と１辺も共有せず直角三角形とならない場合

例えば ∠E が頂角となるものは △EBH の１通りより，その確率は $\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$ である．

△EBH において，$BH=\sqrt{2}$，$EI=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ より，その面積は $\frac{1}{2}\times BH\times EI=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

(A)から(E)より，求める期待値は

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{7}+1\times\frac{1}{7}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{2\sqrt{2}+2}{7}$$

［B］ (1)　$E_2=\sum_{k=1}^{6}\left\{\sum_{l=1}^{6}\frac{(k+l)^2}{6^2}\right\}$

$$=\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6}\left\{\sum_{l=1}^{6}(k^2+2kl+l^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6}\left(6k^2+2k\cdot\frac{6\cdot7}{2}+\frac{6\cdot7\cdot13}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{36}\left(6\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}\cdot2+2\cdot\frac{6\cdot7}{2}\cdot\frac{6\cdot7}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{6}(7\cdot13\cdot2+3\cdot7^2)$$

$$=\frac{329}{6}$$

(2)　$j=1,\ \cdots,\ n+1$ として，j 回目に出る目を a_j とおくと

$$\frac{(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1})^2}{6^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{6^{n+1}}\left\{(a_1+\cdots+a_n)^2+2a_{n+1}(a_1+\cdots+a_n)+{a_{n+1}}^2\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{6^n}+\frac{2}{6^{n+1}}a_{n+1}(a_1+\cdots+a_n)+\frac{1}{6^{n+1}}{a_{n+1}}^2$$

この両辺の a_j $(j=1,\ \cdots,\ n+1)$ について１から６までの総和をとると

$$E_{n+1}=\frac{1}{6}\cdot E_n\cdot6+\frac{2}{6^{n+1}}\cdot\frac{6\cdot7}{2}\left(\frac{6\cdot7}{2}\cdot6^{n-1}\cdot n\right)+\frac{1}{6^{n+1}}\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}\cdot6^n$$

$$=E_n+\frac{49}{2}n+\frac{91}{6}$$

となり，$\frac{49}{2}n+\frac{91}{6}$ は $\{E_n\}$ の階差数列であるので，

$E_1=\frac{91}{6}$ より，$n\geqq2$ のとき

$$E_n=E_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{49}{2}k+\frac{91}{6}\right)$$

$$=\frac{91}{6}+\frac{49}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+\frac{91}{6}(n-1)$$

$$=\frac{49}{4}n^2+\frac{35}{12}n\ （これは\ n=1\ のときも成り立つ）$$

練習問題解答

第 25 講　平面ベクトルと図示

25　平行四辺形 ABCD の対角線の交点を E とし，s，t，u を実数とする．点 P，Q，R は，この平行四辺形と同一平面上にあるものとする．

(1)　$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，$s+2t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ で表される点 P の存在範囲を図示せよ．

(2)　$\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CQ}=u\overrightarrow{DQ}$ で表される点 Q の存在範囲を図示せよ．

(3)　内積 $(\overrightarrow{ER}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{ER}-\overrightarrow{EA})=0$ で表される点 R の存在範囲を図示せよ．

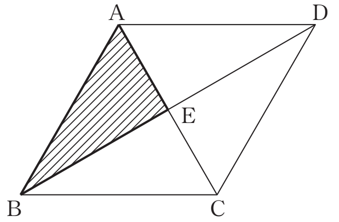
【答】　略

【解答】

(1)　ABCD は平行四辺形より，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$ であるので

$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+2t\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=s\overrightarrow{AB}+2t\overrightarrow{AE}$$

$s+2t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$2t\geqq 0$ であるから，P の存在範囲は △ABE の周と内部．

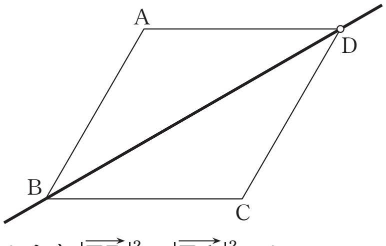


(2)　$u\overrightarrow{DQ}=(\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{DC})$ より

$$(3-u)\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$$

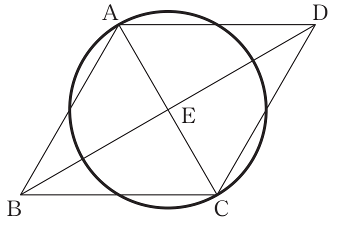
$$(3-u)\overrightarrow{DQ}=2\overrightarrow{DB}\qquad(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}\text{ より})$$

$u=3$ のとき $\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ となり不適．ゆえに $u\neq 3$ であるから $\overrightarrow{DQ}=\dfrac{2}{3-u}\overrightarrow{DB}$ で，$\dfrac{2}{3-u}$ は 0 以外のすべての実数値をとるので，Q の存在範囲は直線 DB から点 D を除いた部分．



(3)　$(\overrightarrow{ER}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{ER}-\overrightarrow{EA})=0$ より $|\overrightarrow{ER}|^2-|\overrightarrow{EA}|^2=0$　　∴　$|\overrightarrow{ER}|=|\overrightarrow{EA}|$

よって R の存在範囲は点 E を中心とする半径 EA の円．



第 26 講　空間ベクトル

26　次の各問いに答えよ.

(1)　正の数 a に対し，空間内の 4 点

$$O(0,\ 0,\ 0),\quad A(0,\ 0,\ 1),\quad P(2\sqrt{2}\,a,\ 0,\ 0),\quad Q(\sqrt{2}\,a,\ \sqrt{5}\,a,\ 1)$$

を考える．$\angle OPQ=\dfrac{\pi}{3}$ が成り立つとき，a の値を求め，点 A から 3 点 O，P，Q を通る平面に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

(2)　四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点を R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする（ただし，$m>0$，$n>0$ とする）．このとき，点 P，Q，R，S が同一平面上にあるための m，n の満たす関係式を求めよ．また線分 PQ，RS の交点を G として，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ.

【選択肢】

(1)　㋐　$a=\dfrac{1}{3}$，$H\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{18},\ \dfrac{1}{18}\right)$　㋑　$a=2$，$H\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

　　㋒　$a=1$，$H\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$

(2)　㋐　$2m=n$，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$　㋑　$m=n$，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$

　　㋒　$m=2n$，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

【答】　(1) ㋒　(2) ㋑

【解答】

(1)　$\overrightarrow{PO}=(-2\sqrt{2}\,a,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{PQ}=(-\sqrt{2}\,a,\ \sqrt{5}\,a,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{PQ}|\cos\frac{\pi}{3}$$

$$4a^2=2\sqrt{2}\,a\sqrt{7a^2+1}\times\frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{2}\,a=\sqrt{7a^2+1}\quad(a>0\text{ より})$$

$$8a^2=7a^2+1$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=1}$$

よって，$P(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$Q(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)$ となるので，実数 α，β を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=\alpha\overrightarrow{OP}+\beta\overrightarrow{OQ}\\&=\alpha(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)+\beta(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)\\&=(2\sqrt{2}\,\alpha+\sqrt{2}\,\beta,\ \sqrt{5}\,\beta,\ \beta)\end{aligned}$$

と表すことができる.

このとき $AH\perp OP$ かつ $AH\perp OQ$ となるが，$\vec{e}=(1,\ 0,\ 0)$ とおくと $\overrightarrow{OP}\parallel\vec{e}$ であるから

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{e}=0$　より　$(2\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\beta,\ \sqrt{5}\beta,\ \beta-1)\cdot(1,\ 0,\ 0)=0$

$$2\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\beta=0 \qquad \therefore\ 2\alpha+\beta=0$$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$　より　$(2\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\beta,\ \sqrt{5}\beta,\ \beta-1)\cdot(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)=0$

$$2(2\alpha+\beta)+5\beta+(\beta-1)=0 \qquad \therefore\ 4\alpha+8\beta=1$$

よって　$\alpha=-\dfrac{1}{12},\ \beta=\dfrac{1}{6}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=(\sqrt{2}(2\alpha+\beta),\ \sqrt{5}\beta,\ \beta)=\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$

$$\therefore\ \mathbf{H}\left(\mathbf{0},\ \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{6}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\right)$$

(2)　$\dfrac{m}{m+n}=u,\ \dfrac{n}{m+n}=v$ とおくと $\begin{cases}\overrightarrow{PQ}=-u\vec{a}+v\vec{b}+u\vec{c}\\ \overrightarrow{PR}=-u\vec{a}+v\vec{c}\\ \overrightarrow{PS}=(v-u)\vec{a}+u\vec{b}\end{cases}$ と表せる．

4点が同一平面上にあるとき

$$\overrightarrow{PS}=\alpha\overrightarrow{PQ}+\beta\overrightarrow{PR}\quad\cdots\cdots①$$

を満たす実数 $\alpha,\ \beta$ が存在する．上記3式と①から

$$\begin{aligned}(v-u)\vec{a}+u\vec{b}&=\alpha(-u\vec{a}+v\vec{b}+u\vec{c})+\beta(-u\vec{a}+v\vec{c})\\&=-(\alpha+\beta)u\vec{a}+\alpha v\vec{b}+(\alpha u+\beta v)\vec{c}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases}v-u=-(\alpha+\beta)u & \cdots\cdots②\\ u=\alpha v & \cdots\cdots③\\ 0=\alpha u+\beta v & \cdots\cdots④\end{cases}$$

を得る．③により $\alpha=\dfrac{u}{v}\left(=\dfrac{m}{n}\right)$ を②の $\alpha+\beta=\dfrac{u-v}{u}\left(=\dfrac{m-n}{m}\right)$ へ代入すると

$$\frac{m}{n}+\beta=\frac{m-n}{m} \qquad \therefore\ \beta=1-\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)$$

このとき④より

$$\frac{m^2}{n}+n-\frac{n^2}{m}-m=0\quad \text{すなわち}\quad (m-n)(m^2+n^2)=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{m=n}$$

また，$m=n$ より $u=v=\dfrac{1}{2}$ となるので，

$$\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},\quad \overrightarrow{PR}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c},\quad \overrightarrow{PS}=\frac{1}{2}\vec{b} \qquad \therefore\ \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PS}$$

よってPRQSは平行四辺形よりPQとRSの交点GはPQの中点

$$\therefore\ \overrightarrow{PG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}}$$

第 27 講　点と直線の距離

27　次の各問いに答えよ．

(1)　円 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ と直線 $x+y+k=0$ を考える．円に直線が接するときの定数 k の値を求めよ．また $k=1$ とし，点Ｐが円周上を動き，点Ｑが直線上を動くとき，点Ｐと点Ｑの距離の最小値を求めよ．

(2)　座標平面上で，円 $(x-1)^2+(y-3)^2=25$ が直線 $2x-y+k=0$ から切り取る線分の長さが $4\sqrt{5}$ であるとき，定数 k の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$k=-5\pm\sqrt{10}$，最小値 $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$

　　㋑　$k=-5\pm\sqrt{5}$，最小値 $3\sqrt{2}-\sqrt{10}$

　　㋒　$k=5\pm\sqrt{10}$，最小値 $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$

(2)　㋐　$k=-6,\ 4$　㋑　$k=-4,\ 6$　㋒　$k=1\pm5\sqrt{5}$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋑

【解答】

(1)　直線 $x+y+k=0$ と円の中心 $(2,\ 3)$ との距離は $\dfrac{|2+3+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|k+5|}{\sqrt{2}}$ である．円に直線が接するとき，この距離が半径 $\sqrt{5}$ に等しいので

$$\frac{|k+5|}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}\qquad \therefore\ \boldsymbol{k=-5\pm\sqrt{10}}$$

また $k=1$ のとき，この距離は $\dfrac{|1+5|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ になることと，半径が $\sqrt{5}$ であることより，ＰとＱの距離の最小値は

$$\boldsymbol{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

(2)　円の半径が 5 であることより，円の中心 $(1,\ 3)$ と直線 $2x-y+k=0$ との距離が

$$\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}$$

すなわち $\sqrt{5}$ となればよいので

$$\frac{|2\times1-3+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$|k-1|=5$$

$$\therefore\ \boldsymbol{k=-4,\ 6}$$

第28講　軌跡の求め方

28　xy 平面上の y 軸に平行な直線 $x=1$ を l とする．l 上の点Pに対して次の3つの条件を満たす点Qを対応させる．

(Ⅰ)　原点をOとするとき，Qは直線OP上にある．

(Ⅱ)　Qの x 座標は負である．

(Ⅲ)　$|\mathrm{AB}|$ で線分ABの長さを表すとき，$|\mathrm{OP}||\mathrm{OQ}|=1$ を満たす．

Pが l 上を動くとき，点Qの軌跡を求めよ．

【選択肢】

㋐　円 $x^2+y^2\pm x=0$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

㋑　円 $x^2+y^2+x=0$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

㋒　円 $x^2+y^2-x=0$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

【答】　㋑

【解答】

$\mathrm{P}(1,\ t)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおく．

条件(Ⅰ)より，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ は直線 $y=tx$ 上にあるので $Y=tX$　……①

条件(Ⅱ)より，$X<0$　……②

条件(Ⅲ)より，$|\mathrm{OP}|^2|\mathrm{OQ}|^2=1$　ゆえに　$(1+t^2)(X^2+Y^2)=1$　……③

②より $X\neq0$ であるから①は $t=\dfrac{Y}{X}$ と変形でき，これを③へ代入すると

$$\left\{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right\}(X^2+Y^2)=1$$

$$(X^2+Y^2)^2=X^2$$

$$X^2+Y^2=-X \qquad (X<0\text{ より})$$

$$\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+Y^2=\frac{1}{4}$$

よって求める軌跡の方程式は　$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$　（ただし，$x\neq0$）

ゆえに求める軌跡は

円 $x^2+y^2+x=0$ の点 $(0,\ 0)$ を除く部分

第29講　通過領域

29　xy 平面上に円 C_1：$x^2+(y+2)^2=4$ と円 C_2：$(x-a)^2+y^2=1$ がある．a を任意の実数として，C_1 と C_2 が異なる2点で交わるとき，その2点を通る直線の通過領域を図示せよ．

【答】　略

【解答】

円 C_1 と C_2 の中心間の距離は $\sqrt{(0-a)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{a^2+4}$ であるので，C_1 と C_2 が異なる2点で交わる条件は

$$2-1<\sqrt{a^2+4}<2+1 \quad \text{すなわち} \quad -3<a^2<5 \qquad \therefore \quad -\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$$

この条件のもとで，C_1 と C_2 の式の辺々の差をとることで，2つの円の交点を通る直線の方程式は

$$2ax+4y+4-a^2=3 \quad \text{したがって} \quad 2ax+4y+1-a^2=0$$

となるが，これを a の2次方程式とみて $a^2-2xa-4y-1=0$ が $-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$ に少なくとも1つの実数解をもつ条件を考えればよい．

$f(a)=a^2-2xa-4y-1=(a-x)^2-x^2-4y-1$ とおくと

(Ⅰ)　$x\leqq-\sqrt{5}$ のとき

$f(-\sqrt{5})<0$ かつ $f(\sqrt{5})>0$ となればよい．$(-\sqrt{5})^2-2x(-\sqrt{5})-4y-1<0$ かつ $(\sqrt{5})^2-2x(\sqrt{5})-4y-1>0$ より，$\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1<y<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$

(Ⅱ)　$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ のとき

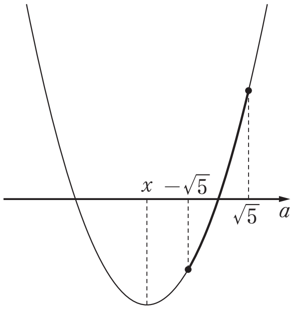
$f(x)\leqq0$ かつ「$f(-\sqrt{5})>0$ または $f(\sqrt{5})>0$」となればよい．$-x^2-4y-1\leqq0$ と「$(-\sqrt{5})^2-2x(-\sqrt{5})-4y-1>0$ または $(\sqrt{5})^2-2x(\sqrt{5})-4y-1>0$」より，

$y\geqq-\dfrac{x^2+1}{4}$ かつ「$y<\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$ または $y<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$」

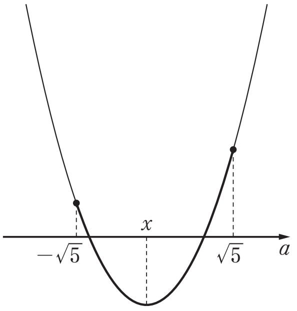
(Ⅲ)　$x\geqq\sqrt{5}$ のとき

$f(-\sqrt{5})>0$ かつ $f(\sqrt{5})<0$ となればよい．$(-\sqrt{5})^2-2x(-\sqrt{5})-4y-1>0$ かつ $(\sqrt{5})^2-2x(\sqrt{5})-4y-1<0$ より，$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1<y<\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$

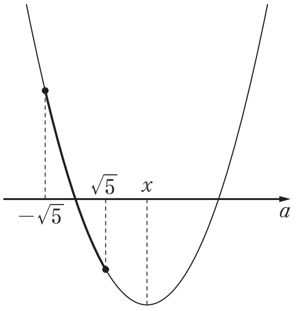
(Ⅰ)



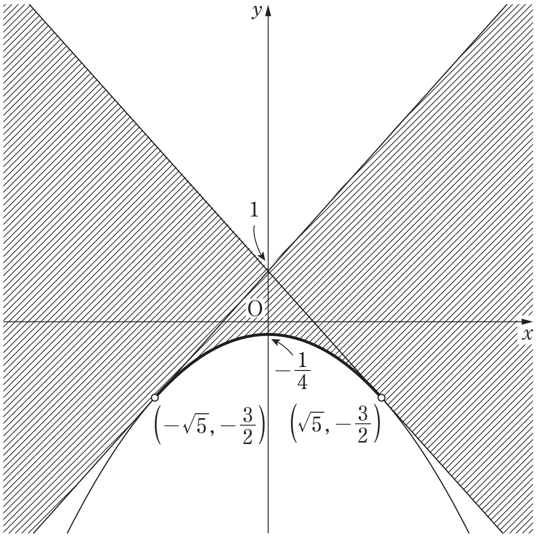
(Ⅱ)



(Ⅲ)



以上より，求める領域は下図斜線部分．境界は $y=-\dfrac{x^2+1}{4}$ $(-\sqrt{5}<x<\sqrt{5})$ のみ含む.



第 30 講　領域と最大最小問題

30　次の一組の 1 次不等式

$$x+y \leqq 7,\quad x+2y \leqq 10,\quad 0 \leqq x \leqq 6,\quad 0 \leqq y \leqq 4$$

の表す領域を考える．

以下の [a]〜[k] に当てはまる数字をそれぞれ答えよ．

(1)　この領域の中で関数 $2x+3y$ の値を最大にする点 P_1 の座標は

$(x,\ y)=([a],\ [b])$ である．

(2)　この領域の中で関数 $(2-t)x+(3-t)y$ の値を最大にする点 $(x,\ y)$ の集合は，t の値を 0 から増加させることによって変化する．

$0 \leqq t <$ [c] のとき，関数の値を最大にする点 P_1 の座標は

$(x,\ y)=([a],\ [b])$，

[c] $< t <$ [d] のとき，関数の値を最大にする点 P_2 の座標は

$(x,\ y)=([e],\ [f])$，

[d] $< t <$ [g] のとき，関数の値を最大にする点 P_3 の座標は

$(x,\ y)=([h],\ [i])$，

[g] $< t$ のとき，関数の値を最大にする点 P_4 の座標は

$(x,\ y)=([j],\ [k])$

である．ただし，P_1，P_2，P_3，P_4 は相異なる点である．

【選択肢】

(1)　(a)　㋐ 6　㋑ 4　㋒ 2　　(b)　㋐ 1　㋑ 4　㋒ 3

(2)　(c)　㋐ 1　㋑ 2　㋒ 3　　(d)　㋐ 2　㋑ 5　㋒ 3

(e)　㋐ 6　㋑ 2　㋒ 4　　(f)　㋐ 4　㋑ 3　㋒ 1

(g)　㋐ 4　㋑ 3　㋒ 7　　(h)　㋐ 4　㋑ 6　㋒ 0

(i)　㋐ 0　㋑ 4　㋒ 6　　(j)　㋐ 0　㋑ 6　㋒ 7

(k)　㋐ 5　㋑ 4　㋒ 0

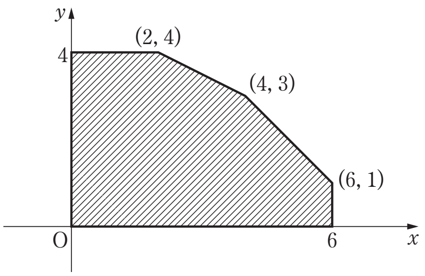
【答】　(1)　(a) ㋑　(b) ㋒

(2)　(c) ㋐　(d) ㋐　(e) ㋑　(f) ㋐　(g) ㋑　(h) ㋒　(i) ㋑　(j) ㋐　(k) ㋒

【解答】

(1)　与式より
$$\begin{cases} y \leqq -x+7 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x+5 \\ 0 \leqq x \leqq 6 \\ 0 \leqq y \leqq 4 \end{cases}$$

よって，与式の表す領域は下図の斜線部の六角形の周及び内部である．



⑴　$2x+3y=k$ とおくと

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}k \quad \cdots\cdots \text{（傾き } -\frac{2}{3} \text{ の直線）}$$

よって k は直線が点 **(4, 3)** を通るとき最大となる．

⑵　$(2-t)x+(3-t)y=k$ とおくと，$3-t\neq 0$ のとき

$$y=\frac{t-2}{3-t}x+\frac{k}{3-t}$$

まず，(Ⅰ) $3-t>0$ すなわち $t<3$ のときは，k が最大のとき y 切片 $\frac{k}{3-t}$ も最大となるので，傾き $\frac{t-2}{3-t}$ に着目して考えると，

(Ⅰ-1)　$\frac{t-2}{3-t}>0$ すなわち $2<t<3$ のとき k は点 (0, 4) で最大となる．

(Ⅰ-2)　$-\frac{1}{2}<\frac{t-2}{3-t}<0$ すなわち $1<t<2$ のとき k は点 (2, 4) で最大となる．

(Ⅰ-3)　$-1<\frac{t-2}{3-t}<-\frac{1}{2}$ すなわち $t<1$ のとき k は点 (4, 3) で最大となる．

(Ⅰ-4)　$\frac{t-2}{3-t}<-1$ は $\frac{t-2}{3-t}=-1+\frac{1}{3-t}>-1$ より $3-t>0$ に矛盾する．

次に，(Ⅱ) $3-t<0$ すなわち $t>3$ のときは，k が最大のとき y 切片 $\frac{k}{3-t}$ は最小となり，このとき

$$\text{傾き } \frac{t-2}{3-t}=-1+\frac{1}{3-t}<-1$$

より，k は点 (0, 0) で最大となる．

(Ⅰ)～(Ⅱ)より整理すると，k の値を最大にする点の座標は

$$\begin{cases} 0\leqq t<\mathbf{1} \text{ のとき} & \mathrm{P_1}(\mathbf{4},\ \mathbf{3}) \\ \mathbf{1}<t<\mathbf{2} \text{ のとき} & \mathrm{P_2}(\mathbf{2},\ \mathbf{4}) \\ \mathbf{2}<t<\mathbf{3} \text{ のとき} & \mathrm{P_3}(\mathbf{0},\ \mathbf{4}) \\ \mathbf{3}<t \text{ のとき} & \mathrm{P_4}(\mathbf{0},\ \mathbf{0}) \end{cases}$$

第 31 講　円順列やじゅず順列

31　k を 2 以上の自然数とする．$2k+2$ 個の椅子が円形に並んでいる．k 人が，どの 2 人も隣り合わないように，椅子に座る場合の数を求めよ．ただし，人は区別できないものとする．

【選択肢】

㋐　k が奇数のとき $\dfrac{k-1}{2}$，k が偶数のとき $\dfrac{k+2}{2}$

㋑　k が奇数のとき $\dfrac{k+1}{2}$，k が偶数のとき $\dfrac{k+2}{2}$

㋒　k が奇数のとき $\dfrac{k-1}{2}$，k が偶数のとき $\dfrac{k}{2}$

【答】　㋑

【解答】

まずは 2 個の椅子を固定して，その隣りに，人の座る椅子，人の座らない椅子，人の座る椅子，人の座らない椅子，……，人の座る椅子，人の座らない椅子と，残りの椅子が 1 つになるまで円形に並べていく．

この段階で人が座らない椅子は最初の 2 個以外はすべて連続していなく，また，人の座る椅子も同じく連続していない．

最初に固定した 2 個を始まりとし，時計まわりに人の座らない椅子に番号をつけると，連続していない人の座らない椅子は 1 から $k-1$ まで番号がつくことになる．

残りの椅子をどこに配置するかを考える．

(Ⅰ)　k が奇数のとき

l を整数として，$1 \leqq l \leqq \dfrac{k-1}{2}$ に対し，l 番目の椅子の隣りに最後の椅子を置いた場合と $k-l$ 番目の椅子の隣りに最後の椅子を置いた場合は，回転することで同じ並べ方と考えられるので $\dfrac{k-1}{2}$ 通り．

また固定した椅子の隣りに最後の椅子を置いた場合が 1 通り．

よって $\dfrac{k-1}{2}+1=\dfrac{k+1}{2}$（通り）

(Ⅱ)　k が偶数のとき

l を整数として，$1 \leqq l \leqq \dfrac{k}{2}-1$ に対し，l 番目の椅子の隣りに最後の椅子を置いた場合と $k-l$ 番目の椅子の隣りに最後の椅子を置いた場合は，回転することで同じ並べ方と考えられるので $\dfrac{k}{2}-1$ 通り．

また固定した椅子の隣りに最後の椅子を置いた場合が 1 通り．

更に固定した椅子の真向かいに最後の椅子を置いた場合が 1 通り．

　よって $\dfrac{k}{2}-1+1+1=\dfrac{k}{2}+1=\dfrac{k+2}{2}$（通り）

以上より，求める場合の数は，**$\boldsymbol{k}$ が奇数のとき $\boldsymbol{\dfrac{k+1}{2}}$**，**$\boldsymbol{k}$ が偶数のとき $\boldsymbol{\dfrac{k+2}{2}}$**

第32講　n 人を部屋に分ける

32 1から n までの番号をつけた n 枚のカードがある．これら n 枚のカードを A，B，C の3つの箱に分けて入れる．ただし，どの箱にも少なくとも1枚は入れるものとする．自然数 l は $2l \leqq n$ を満たすとする．$1 \leqq k \leqq l$ である各整数 k について $2k-1$ と $2k$ の番号のカードをペアと考える．いずれかの箱に少なくとも1つのペアが入る場合の数を n と l を用いて表せ．

【選択肢】

㋐ $3^n+3\cdot2^n-2^l\cdot3^{n-l}-3\cdot2^{n-l}+3$　　㋑ $3^n-3\cdot2^n-2^l\cdot3^{n-l}+3\cdot2^{n-l}+3$

㋒ $3^n-3\cdot2^n+2^l\cdot3^{n-l}+3\cdot2^{n-l}-3$

【答】 ㋑

【解答】

まずは，ペアを考えないで，各箱に少なくとも1枚入る場合の数を考える．

1枚も入らなくてよいとすると 3^n 通り考えられるが，この中から2つの箱に入らない場合は3通りあり，1つの箱だけに入らない場合は $(2^n-2)\times3$ 通りあるので

$$3^n-3(2^n-2)-3=3^n-3\cdot2^n+3 \text{（通り）}$$

次に，1と2，3と4，……，$2l-1$ と $2l$ の l 組について各ペアのカードが異なる箱に入る場合は

$$3\times2=6 \text{（通り）}$$

あるので，l 組すべての2つのカードが異なる箱に入るのは 6^l 通りとなる．残り $n-2l$ 枚の分け方は 3^{n-2l} 通りで，計

$$6^l\times3^{n-2l} \text{（通り）}$$

であるが，この中で1枚も入らない箱がある場合は

$$2^l\times2^{n-2l}\times3 \text{（通り）}$$

あるので，求める場合の数は

$$(3^n-3\cdot2^n+3)-(6^l\cdot3^{n-2l}-2^l\cdot2^{n-2l}\cdot3)$$

$$=\mathbf{3^n-3\cdot2^n-2^l\cdot3^{n-l}+3\cdot2^{n-l}+3} \text{（通り）}$$

第 33 講　最短経路

33　図 1 のような道路がある．A 地点を出発して，道路上を東または北または北東に進んで B 地点に到達する経路を考える（図 2 の太線はそのような経路の一例である）．

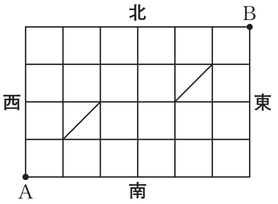


図 1

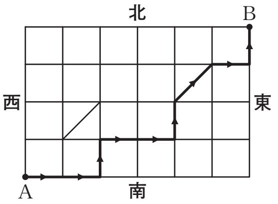


図 2

A 地点から B 地点に至る経路は何通りあるか求めよ．

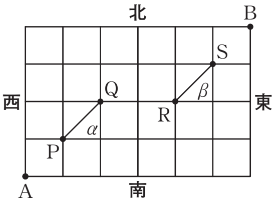
【選択肢】

㋐　274 通り　　㋑　270 通り　　㋒　266 通り

【答】　㋐

【解答】

図のように点 P，Q，R，S を定め，P から Q へ向かう北東の道を α，R から S へ向かう北東の道を β とする．



(Ⅰ)　α，β を両方通らない経路は

東に 6 回，北に 4 回移動する場合だけ考えればよいので，${}_{10}C_4=210$（通り）

(Ⅱ)　α を通り，β を通らない経路は

A から P までは東に 1 回，北に 1 回移動するので，${}_2C_1=2$（通り），P から Q までは 1（通り），Q から B までは東に 4 回，北に 2 回移動するので，${}_6C_2=15$（通り）であるから，

$2\times1\times15=30$（通り）

(Ⅲ)　β を通り，α を通らない経路は

対称性より(Ⅱ)と同様に 30 通り．

(Ⅳ)　α，β の両方を通る経路は

A から P までは東に 1 回，北に 1 回移動するので，${}_2C_1=2$（通り），P から Q までは 1（通り），Q から R までは 1（通り），R から S までは 1（通り），S から B までは東に 1 回，北に 1 回移動するので，${}_2C_1=1$（通り）であるから，$2\times1\times1\times1\times2=4$（通り）

以上より求める経路は　$210+30+30+4=$**274（通り）**

第34講　事象の考え方と確率

34　9枚のカードに1から9までの数字が1つずつ記してある．このカードの中から任意に1枚を抜き出し，その数字を記録し，もとのカードの中に戻すという操作を n 回繰り返す．記録された数の積が8の倍数となる確率を求めよ．

【選択肢】

㋐　$1-\dfrac{(2n^2-13n+19)5^{n-1}}{9^n}$　㋑　$1-\dfrac{(2n^2+13n-5)5^{n-1}}{9^n}$

㋒　$1-\dfrac{(2n^2+13n+25)5^{n-2}}{9^n}$

【答】　㋒

【解答】

まずは8の倍数にならないものを求める．

(Ⅰ)　積が奇数になる場合

すべてが奇数であればよいので，その確率は $\left(\dfrac{5}{9}\right)^n$　……①

(Ⅱ)　積が4の倍数ではない偶数になる場合

2または6が1回だけ抜き出されて，残りすべてが奇数であればよい．2または6の取り出されるのは n 回のうち1回だけであるので，その確率は ${}_n\mathrm{C}_1\times\dfrac{2}{9}\times\left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-1}$　……②

(Ⅲ)　積が8の倍数ではない4の倍数になる場合

・2または6が2回だけ抜き出されて，残りすべてが奇数である場合

2または6の取り出されるのは n 回のうち2回だけであるので，

その確率は ${}_n\mathrm{C}_2\times\left(\dfrac{2}{9}\right)^2\times\left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-2}=\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}\times\left(\dfrac{2}{9}\right)^2\times\left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-2}$　……③

・4が1回だけ抜き出されて，残りすべてが奇数である場合

(Ⅱ)の場合と同様に考えて，その確率は ${}_n\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{9}\times\left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-1}$　……④

以上より，8の倍数にならない確率は

$$①+②+③+④$$
$$=\left(\frac{5}{9}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\times\frac{2}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2\times\left(\frac{2}{9}\right)^2\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1\times\frac{1}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{(2n^2+13n+25)5^{n-2}}{9^n}\quad\cdots\cdots⑤$$

ここで，①については $n\geqq1$，②と④については $n-1\geqq1$ すなわち $n\geqq2$，③については $n-2\geqq1$ すなわち $n\geqq3$ のときに生じる確率であるが，②と④は $n=1$ のときにも成り立ち，③は $n=1$，2のときにも成り立つので，⑤は $n\geqq1$ について成り立つ．

以上より，求める確率は　$1-⑤=\boldsymbol{1-\dfrac{(2n^2+13n+25)5^{n-2}}{9^n}}$

第 35 講　条件付き確率

35 2 つのさいころ A と B があり，各面に 1，2，3，4，5，6 の目が書かれている．
これらのさいころについて，A のさいころの各面には 1，3，4，5，6，8 の目のシールを貼り，B のさいころの各面には 1，2，2，3，3，4 の目のシールを貼った．

はじめに硬貨を投げ，次に A と B のさいころを同時に投げる次の試行を行う．

・硬貨を投げて表が出れば，両方のさいころのシールをすべてはがして 2 つのさいころを同時に投げる．

・硬貨を投げて裏が出れば，両方ともシールをはがさずに 2 つのさいころを同時に投げる．

この試行について，2 つのさいころの目の和が 3 の倍数であるという条件のもとで，目の差が 2 以下である条件付き確率を求めよ．

ただし，シールの有無に関わらず，さいころの各面の出方は同様に確からしいとする．

【選択肢】

㋐ $\frac{15}{44}$　　㋑ $\frac{5}{8}$　　㋒ $\frac{5}{12}$

【答】 ㋑

【解答】

表が出たときの A と B の目の和と裏が出たときの A と B の目の和を以下の 2 つの表にまとめる．

ただし，斜体文字は 2 つの目の和が 3 の倍数になるもので，太字は 2 つの目の和が 3 の倍数になるものの中で 2 つの目の差が 2 以下のものを表している．

《表》

B＼A	1	2	3	4	5	6
1	2	**3**	4	5	*6*	7
2	**3**	4	5	**6**	7	8
3	4	5	**6**	7	8	*9*
4	5	**6**	7	8	**9**	10
5	*6*	7	8	**9**	10	11
6	7	8	*9*	10	11	**12**

《裏》

B＼A	1	3	4	5	6	8
1	2	4	5	*6*	7	*9*
2	**3**	5	**6**	7	8	10
2	**3**	5	**6**	7	8	10
3	4	**6**	7	8	*9*	11
3	4	**6**	7	8	*9*	11
4	5	7	8	**9**	10	*12*

上記の 72 通りの起こる確率は同様に確からしいので，求める条件付き確率は $\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$

第 36 講　相加平均と相乗平均

36　$x>0$ のとき，$\dfrac{x+1}{x^2+4x+12}$ の最大値を求めよ．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{5}{44}$ ($x=4$ のとき)　㋑ $\dfrac{2}{17}$ ($x=1$ のとき)　㋒ $\dfrac{1}{8}$ ($x=2$ のとき)

【答】 ㋒

【解答】

$x>0$ より $x+1\neq 0$ であるので

$$\frac{x+1}{x^2+4x+12}=\frac{1}{\dfrac{x^2+4x+12}{x+1}}$$

と変形でき，また $x^2+4x+12=(x+1)(x+3)+9$ より

$$\frac{x+1}{x^2+4x+12}=\frac{1}{\dfrac{x^2+4x+12}{x+1}}=\frac{1}{x+3+\dfrac{9}{x+1}}$$

と変形できる．

ここで，$x>0$ より，$x+1>0$，$\dfrac{9}{x+1}>0$ であるので

$$x+1+\frac{9}{x+1}\geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{9}{x+1}}=6$$

が成立する．等号は

$x+1=\dfrac{9}{x+1}$ つまり $x=2$ のとき成立する．

よって $x+1+\dfrac{9}{x+1}\geqq 6$ より $x+3+\dfrac{9}{x+1}\geqq 8$ したがって

$$\frac{1}{x+3+\dfrac{9}{x+1}}\leqq\frac{1}{8}$$

ゆえに求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$ ($x=2$ のとき)

第 37 講　解と係数の関係

37　$a+b+c=0$ のとき

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

が成立することを示せ.

【答】　略

【解答】

p, q を定数として

$$\begin{cases} ab+bc+ca=p \\ abc=q \end{cases}$$

とおくと $a+b+c=0$ より, a, b, c は方程式

$$t^3+pt-q=0$$

の 3 解である. よって

$$a^3+pa-q=0 \qquad \therefore\ a^3=-pa+q$$

となる. 同様に

$$b^3=-pb+q,\quad c^3=-pc+q$$

を得るので

$$a^3+b^3+c^3=-p(a+b+c)+3q=3q$$

また $a^5=a^3\cdot a^2=-pa^3+qa^2$ より

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &=-2p \end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned} a^5+b^5+c^5&=-p(a^3+b^3+c^3)+q(a^2+b^2+c^2) \\ &=-p\times 3q+q\times(-2p) \\ &=-5pq \end{aligned}$$

このとき

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

$$=\frac{-5pq}{5}-\frac{-2p}{2}\cdot\frac{3q}{3}=0$$

よって, 与式は示された.

第 38 講　方程式・不等式の解

38 x の不等式 $ax^2-2a^2x+a^3+a^2-b+1 \geqq 0$ が実数解をもつような a と b の条件を求めよ.

【選択肢】

㋐ $a>0$ または $b \leqq a^2+1$ $(a \leqq 0)$　㋑ $a \geqq 0$ または $b \leqq a^2+1$ $(a<0)$

㋒ $a>0$ または $b>a^2+1$ $(a \leqq 0)$

【答】 ㋐

【解答】

(Ⅰ) $a>0$ のとき

$y=ax^2-2a^2x+a^3+a^2-b+1$ のグラフは下に凸であるので，a と b の値に関わらず $y \geqq 0$ となる x は存在する.

(Ⅱ) $a=0$ のとき

与えられた不等式は $-b+1 \geqq 0$ となるので，$b \leqq 1$ のときに x は実数解をもつ.

(Ⅲ) $a<0$ のとき

$y=ax^2-2a^2x+a^3+a^2-b+1=a(x-a)^2+a^2-b+1$ のグラフは上に凸であるので，$a^2-b+1 \geqq 0$ すなわち $b \leqq a^2+1$ のときに x は実数解をもつ.

以上より，求める条件は

$$\boldsymbol{a>0 \text{ または } b \leqq a^2+1 \ (a \leqq 0)}$$

第 39 講　虚数と方程式

39　複素数 α と β を次で定める.

$$\alpha=\sqrt{5}-1+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i$$
$$\beta=-\sqrt{5}-1+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i$$

次の問いに答えよ.

(1)　α を解にもち，しかもすべての係数が実数であるような 2 次方程式を 1 つ求めよ.

(2)　α 及び β の両方を解にもち，しかもすべての係数が実数であるような 4 次方程式を 1 つ求めよ.

(3)　β^5 の値を求めよ.

【選択肢】

(1)　㋐　$x^2+2(\sqrt{5}-1)x+16=0$　　㋑　$x^2-2(\sqrt{5}-1)x+16=0$

　　㋒　$x^2-2(\sqrt{5}+1)x+16=0$

(2)　㋐　$x^4+4x^3+16x^2+64x+256=0$　　㋑　$x^4-2x^3+4x^2-8x+16=0$

　　㋒　$x^4-4x^3+16x^2-64x+256=0$

(3)　㋐　-2048　　㋑　1024　　㋒　2048

【答】　(1) ㋑　(2) ㋐　(3) ㋑

【解答】

(1)　$\overline{\alpha}=\sqrt{5}-1-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i$ より

$$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=2(\sqrt{5}-1)\\ \alpha\overline{\alpha}=(\sqrt{5}-1)^2+(10+2\sqrt{5})=16\end{cases}$$

よって題意を満たす 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2-2(\sqrt{5}-1)x+16=0}$$

(2)　(1)と同様に β を解にもつ実数係数の 2 次方程式の 1 つは

$$x^2+2(\sqrt{5}+1)x+16=0$$

このとき

$$\begin{aligned}&\{x^2-2(\sqrt{5}-1)x+16\}\{x^2+2(\sqrt{5}+1)x+16\}\\&=\{(x^2+2x+16)-2\sqrt{5}x\}\{(x^2+2x+16)+2\sqrt{5}x\}\\&=(x^2+2x+16)^2-(2\sqrt{5}x)^2\\&=x^4+4x^3+16x^2+64x+256\end{aligned}$$

となるので，求める 4 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^4+4x^3+16x^2+64x+256=0}$$

(3)　$x^5=(x^4+4x^3+16x^2+64x+256)(x-4)+1024$ より

$$\beta^5=\boldsymbol{1024}$$

第 40 講　解の個数

40　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，x の方程式

$$\left|\frac{13}{4} - 6\sin x - 2\cos 2x\right| = k$$

の解の個数を調べよ．ただし，k は実数定数とする．

【選択肢】

㋐
$$\begin{cases} 0 & (k<0,\ k>\frac{5}{4} \text{ のとき}) \\ 2 & (k=0,\ 1 \leqq k \leqq \frac{5}{4} \text{ のとき}) \\ 4 & (0<k<\frac{3}{4} \text{ のとき}) \\ 5 & (k=\frac{3}{4} \text{ のとき}) \\ 6 & (\frac{3}{4}<k<1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

㋑
$$\begin{cases} 0 & (k<0,\ k>\frac{5}{4} \text{ のとき}) \\ 2 & (k=0,\ 1<k \leqq \frac{5}{4} \text{ のとき}) \\ 4 & (0<k<\frac{3}{4},\ k=1 \text{ のとき}) \\ 5 & (k=\frac{3}{4} \text{ のとき}) \\ 6 & (\frac{3}{4}<k<1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

㋒
$$\begin{cases} 0 & (k \leqq 0,\ k>\frac{5}{4} \text{ のとき}) \\ 2 & (1 \leqq k \leqq \frac{5}{4} \text{ のとき}) \\ 4 & (0<k<\frac{3}{4} \text{ のとき}) \\ 5 & (k=\frac{3}{4} \text{ のとき}) \\ 6 & (\frac{3}{4}<k<1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

【答】 ㋑

【解答】

$\sin x = t$ とおくと，$0 \leqq x \leqq \pi$ より t の値に対する x の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 & (t<0,\ t>1) \\ 1 & (t=1) \\ 2 & (0 \leqq t<1) \end{cases}$$

となる．

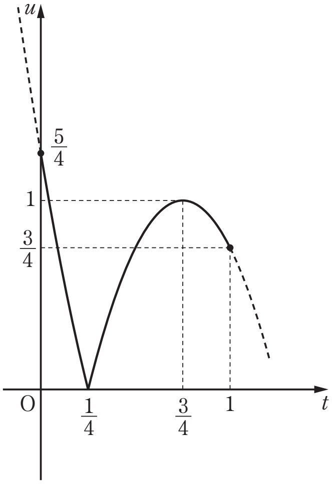
ここで

$$\begin{aligned} \frac{13}{4} - 6\sin x - 2\cos 2x &= \frac{13}{4} - 6\sin x - 2(1 - 2\sin^2 x) \\ &= 4\sin^2 x - 6\sin x + \frac{5}{4} \\ &= 4\left(\sin x - \frac{3}{4}\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$=4\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-1$$

より，与式は $\left|4\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-1\right|=k$ となるので，$u=\left|4\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-1\right|$ と $u=k$ のグラフの共有点の t 座標を考えると，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} \mathbf{0} & \left(k<0,\ k>\frac{5}{4}\ \text{のとき}\right) \\ \mathbf{2} & \left(k=0,\ 1<k\leqq\frac{5}{4}\ \text{のとき}\right) \\ \mathbf{4} & \left(0<k<\frac{3}{4},\ k=1\ \text{のとき}\right) \\ \mathbf{5} & \left(k=\frac{3}{4}\ \text{のとき}\right) \\ \mathbf{6} & \left(\frac{3}{4}<k<1\ \text{のとき}\right) \end{cases}$$



第 41 講　複数の変数の取り扱い

41　$(x-1)^4+y^2=25$ のとき $f(x,\ y)=3(x-1)^2+4y$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

㋐　最大値 25〔$(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3},\ 4)$ のとき〕，
最小値 -25〔$(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3}i,\ -4)$ のとき〕

㋑　最大値 20〔$(x,\ y)=(1,\ 5)$ のとき〕，最小値 -20〔$(x,\ y)=(1,\ -5)$ のとき〕

㋒　最大値 25〔$(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3},\ 4)$ のとき〕，最小値 -20〔$(x,\ y)=(1,\ -5)$ のとき〕

【答】　㋒

【解答】

$\{(x-1)^2\}^2+y^2=25$ より，$(x-1)^2\geqq 0$ に注意すると，

$(x-1)^2=5\cos\theta$，$y=5\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と表せる．このとき

$$\begin{aligned}f(x,\ y)&=3\cdot5\cos\theta+4\cdot5\sin\theta\\&=20\sin\theta+15\cos\theta\\&=25\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$
（ただし，α は $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ かつ $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ を満たす実数）

であるので，$-\frac{\pi}{2}+\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\frac{\pi}{2}+\alpha$ より，

$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ のとき，$f(x,\ y)$ は**最大値 25** をとる．

このとき，$5\cos\theta=5\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=5\sin\alpha=5\cdot\frac{3}{5}=3$，

$5\sin\theta=5\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=5\cos\alpha=5\cdot\frac{4}{5}=4$ より $(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3},\ 4)$ となる．

また $\theta+\alpha=-\frac{\pi}{2}+\alpha$ すなわち $\theta=-\frac{\pi}{2}$ のとき，$f(x,\ y)$ は**最小値 −20** をとる．

このとき，$5\cos\theta=5\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=5\cdot0=0$，

$5\sin\theta=5\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=5\cdot(-1)=-5$ より $(x,\ y)=(1,\ -5)$ となる．

第 42 講　無理数の証明

42	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ.

【答】 略

【解答】

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が有理数と仮定すると，ある有理数 α を用いて $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\alpha$ と表せる．両辺を 2 乗して $5+2\sqrt{6}=\alpha^2$ より $\sqrt{6}=\dfrac{\alpha^2-5}{2}$

　ここで右辺は有理数となり，$\sqrt{6}>0$ より右辺は $\dfrac{m}{l}$（ただし，l と m は互いに素な自然数）と表せる．

$\sqrt{6}=\dfrac{m}{l}$ より $\sqrt{6}\,l=m$ となるので，これを 2 乗して $6l^2=m^2$ を得る．

　ここで，l は自然数より l^2 は整数，したがって $6l^2$ は偶数となる．

　また整数 k を用いて

$$(2k)^2=2\cdot 2k^2,\quad (2k+1)^2=2(2k^2+2k)+1$$

となるので，整数を 2 乗したものが偶数になるのは，その整数が偶数のときに限る．

　よって $6l^2=m^2$ が偶数より，$m=2k$ と表せる．このとき $6l^2=m^2$ は $6l^2=4k^2$ すなわち $3l^2=2k^2$ となり，$3l^2$ は 3 の倍数，$2k^2$ は偶数であり，2 と 3 は互いに素であるので，この式は 6 の倍数つまり整数 M を用いて $6M$ と表せる．

　よって $3l^2=6M$ より $l^2=2M$，l^2 は偶数となるので l は偶数．これは l と m が互いに素であることに矛盾する．

　よって $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．

第 43 講　因数定理・剰余の定理

43 x の整式 $f(x)$ を x^3+1 で割ったときの余りが x^2+x+3，x^3-1 で割ったときの余りが $2x+1$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を x^2-x+1 で割ったときの余りを求めよ．

(2) $f(x)$ を $(x-1)(x^2-x+1)$ で割ったときの余りを求めよ．

【選択肢】

(1) ㋐ $x+1$　㋑ $2x+2$　㋒ $2x-1$

(2) ㋐ x^2-3x+2　㋑ x^2+2x+3　㋒ $-x^2+3x+1$

【答】 (1) ㋑　(2) ㋒

【解答】

(1) $f(x)$ を x^3+1 で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3+1)Q_1(x)+x^2+x+3 \\ &= (x+1)(x^2-x+1)Q_1(x)+x^2-x+1+2x+2 \\ &= (x^2-x+1)\{(x+1)Q_1(x)+1\}+2x+2 \end{aligned}$$

となるので，$f(x)$ を x^2-x+1 で割ったときの余りは $\mathbf{2x+2}$

(2) (1)において $(x+1)Q_1(x)+1$ を $x-1$ で割ったときの商を $Q_2(x)$，余りを r（定数）とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-x+1)\{(x-1)Q_2(x)+r\}+2x+2 \\ &= (x-1)(x^2-x+1)Q_2(x)+r(x^2-x+1)+2x+2 \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

と表せる．

ここで，$f(x)$ を x^3-1 で割ったときの余りが $2x+1$ であるので，商を $Q_3(x)$ とおくと

$$f(x)=(x^3-1)Q_3(x)+2x+1$$

より $f(1)=3$ を得る．

①に $x=1$ を代入すると $f(1)=r+4$ となるので，$r=-1$ となる．

よって

$$f(x)=(x-1)(x^2-x+1)Q_2(x)-x^2+3x+1$$

となるので，求める余りは $\boldsymbol{-x^2+3x+1}$

第44講　$A=BQ+R$ について

44　$\{(x+1)(x+2)(x+3)\}^{10}$ を $(x+2)^{12}$ で割ったときの余りを求めよ．

【選択肢】

㋐　$(x+2)^9$　　㋑　$(x+2)^{10}$　　㋒　$(x+2)^{11}$

【答】　㋑

【解答】

$$
\begin{aligned}
\{(x+1)(x+2)(x+3)\}^{10} &= (x+2)^{10}\{(x+1)(x+3)\}^{10} \\
&= (x+2)^{10}\{(x+2)^2-1\}^{10} \\
&= (x+2)^{10}\{(x+2)^{20}+(-1){}_{10}\mathrm{C}_1(x+2)^{18}+(-1)^2{}_{10}\mathrm{C}_2(x+2)^{16}+ \\
&\qquad \cdots\cdots+(-1)^8{}_{10}\mathrm{C}_8(x+2)^4+(-1)^9{}_{10}\mathrm{C}_9(x+2)^2+(-1)^{10}\} \\
&= (x+2)^{30}+(-1){}_{10}\mathrm{C}_1(x+2)^{28}+(-1)^2{}_{10}\mathrm{C}_2(x+2)^{26}+ \\
&\qquad \cdots\cdots+(-1)^8{}_{10}\mathrm{C}_8(x+2)^{14}+(-1)^9{}_{10}\mathrm{C}_9(x+2)^{12}+(-1)^{10}(x+2)^{10}
\end{aligned}
$$

より，求める余りは

$$(-1)^{10}(x+2)^{10}=\boldsymbol{(x+2)^{10}}$$

第 45 講　整数問題の攻め方 その 1

45　a，b，c，d を自然数として，$abcd=a+b+c+d$ かつ $a\leqq b\leqq c\leqq d$ を満たすものを求めよ．

【選択肢】

㋐　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)$　　㋑　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 2,\ 4)$

㋒　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 4,\ 4)$

【答】 ㋐

【解答】

$a\leqq b\leqq c\leqq d$ より $abcd=a+b+c+d\leqq 4d$ となるので，$d>0$ より $abc\leqq 4$

これを満たすのは $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 2)$，$(1,\ 1,\ 3)$，$(1,\ 1,\ 4)$，$(1,\ 2,\ 2)$ に限る．

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

$abcd=a+b+c+d$ は $d=3+d$ となり，これを満たす d は存在しない．

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 2)$ のとき

$abcd=a+b+c+d$ は $2d=4+d$ となり，これより $d=4$

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 3)$ のとき

$abcd=a+b+c+d$ は $3d=5+d$ となり，これより $d=\dfrac{5}{2}$　d は自然数より不適．

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 4)$ のとき

$abcd=a+b+c+d$ は $4d=6+d$ となり，これより $d=2$　このとき $c>d$ となり不適．

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 2)$ のとき

$abcd=a+b+c+d$ は $4d=5+d$ となり，これより $d=\dfrac{5}{3}$　d は自然数より不適．

以上より，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)}$

第 46 講　整数問題の攻め方 その 2

46　次の各問いに答えよ．

(1)　$6a+21b=2001$ を満たす整数 a，b の組の中で，a と b の差の絶対値が最小になるような a の値を求めよ．

(2)　9 で割り切れる整数全体の集合を A，15 で割り切れる整数全体の集合を B とする．$C=\{x+y \mid x\in A,\ y\in B\}$ とするとき，C は 3 で割り切れる整数全体の集合と一致することを示せ．

【選択肢】

(1)　㋐　$a=81$　　㋑　$a=53$　　㋒　$a=71$

【答】　(1) ㋒

【解答】

(1)　与式から

$$6a+21b=2001 \quad \cdots\cdots①$$
$$6\cdot 330+21\cdot 1=2001 \quad \cdots\cdots②$$

であるので，①－②より

$$6(a-330)+21(b-1)=0$$
$$6(a-330)=21(1-b)$$
$$\therefore\quad 2(a-330)=7(1-b)$$

ここで，2 と 7 は互いに素であるので，この式は 14 の倍数，つまり整数 k を用いて

$$2(a-330)=7(1-b)=14k$$

とおけるので，a と b は

$$a=7k+330,\quad b=-2k+1$$

と表せる．このとき

$$a-b=(7k+330)-(-2k+1)$$
$$=9k+329$$

であるので $k=-37$ のとき $|a-b|$ は最小となる．よって

$$a=7\cdot(-37)+330=\mathbf{71}$$

(2)　3 で割り切れる整数全体の集合を D とおく．$x\in C$ ならば整数 k，l を用いて

$$x=9k+15l$$

と表せるので

$$x=3(3k+5l)\in D$$

逆に $x\in D$ ならば整数 k を用いて $x=3k$ と表せるが

$$x=3k$$
$$=\{9\cdot 2+15\cdot(-1)\}k$$
$$=9\cdot 2k+15\cdot(-k)\in C$$

よって　$C=D$

第 47 講　p 進法

47　次の各問いに答えよ．ただし，$1234_{(6)}$ は 4 桁，$123_{(5)}$ は 3 桁，$012_{(4)}$ は 2 桁と判断する．

(1)　ある自然数 x は，5 進法で表しても 6 進法で表しても 3 桁になり，5 進法で表したときと 6 進法で表したときの各位の数字が逆の順になっているという．x を 10 進法で表して答えよ．

(2)　4 進法で表しても 6 進法で表しても 3 桁になる自然数 y について，4 進法で表したときと 6 進法で表したときの各位の数字が逆の順になっているものが存在しないことを示せ．

【選択肢】

(1)　㋐　92　　㋑　45　　㋒　87

【答】　(1) ㋒

【解答】

(1)　a，c を 4 以下の自然数，b を 0 以上 4 以下の整数とするとき，

$x=a\cdot5^2+b\cdot5+c=c\cdot6^2+b\cdot6+a$ と表せるので

$$b=24a-35c \quad \cdots\cdots①$$

を得る．

ここで，a，c は 4 以下の自然数より $24a$ は 24，48，72，96 のいずれかで，$35c$ は 35，70，105，140 のいずれかとなり，また b は 0 以上 4 以下の整数より，①を満たすものは $(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 2)$ だけであることがわかる．

以上より，$x=\mathbf{87}$

(2)　4 進法で表したときと 6 進法で表したときの各位の数字がちょうど逆の順になっているものが存在すると仮定すると，a，c は 3 以下の自然数，b を 0 以上 3 以下の整数として，

$y=a\cdot4^2+b\cdot4+c=c\cdot6^2+b\cdot6+a$ と表せる．これから

$$2b=5(3a-7c) \quad \cdots\cdots②$$

となるが，b，$3a-7c$ は整数で，2 と 5 は互いに素より②は整数 k を用いて $10k$ と表せる．

$2b=10k$ より $b=5k$ であるが，b は 0 以上 3 以下の整数より $k=0$ に決まる．このとき $5(3a-7c)=10k$ より $3a-7c=0$ となるが，これを満たす 3 以下の自然数 a と c は存在しない．

よって，4 進法で表したときと 6 進法で表したときの各位の数字がちょうど逆の順になっているものは存在しない．

第48講　必要十分条件

48　x, y, u, v を実数として

$$x^2+y^2=1,\ u^2+v^2=1,\ yv<0$$

を満たしているとする．このとき $(1+x+u)^2+(y+v)^2<1$ となるための必要十分条件を x と u を用いて表せ．

【選択肢】

㋐　$x+u<0$ かつ $-1\leqq x\leqq 1$ かつ $-1\leqq u\leqq 1$

㋑　$x+u\leqq 0$ かつ $-1\leqq x\leqq 1$ かつ $-1\leqq u\leqq 1$

㋒　$x+u<0$ かつ $-1<x<1$ かつ $-1<u<1$

【答】　㋒

【解答】

与式より

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots① \\ u^2+v^2=1 & \cdots\cdots② \\ yv<0 & \cdots\cdots③ \\ (1+x+u)^2+(y+v)^2<1 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

$$① \iff y^2=1-x^2$$
$$y=\pm\sqrt{(1-x)(1+x)} \text{ かつ } -1\leqq x\leqq 1$$

同様に

$$② \iff v=\pm\sqrt{(1-u)(1+u)} \text{ かつ } -1\leqq u\leqq 1$$

③より y と v は異符号であるから，$y\neq 0$，$v\neq 0$ よって $-1<x<1$，$-1<u<1$ であり

$$(y,\ v)=\left(\pm\sqrt{(1-x)(1+x)},\ \mp\sqrt{(1-u)(1+u)}\right)\text{（複号同順）}\quad\cdots\cdots⑤$$

このとき④より $(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2(x+u)+2xu+2yv<0$ となるが，

①と②より $1+(x+u)+xu+yv<0$

これに⑤を代入すると $(1+x)(1+u)-\sqrt{(1-x)(1+x)(1-u)(1+u)}<0$ より

$$\sqrt{(1+x)(1+u)}<\sqrt{(1-x)(1-u)}$$

この両辺を2乗して整理すると $(1+x)(1+u)<(1-x)(1-u)$ つまり $x+u<0$ を得る．

以上より，$x+u<0$ かつ $-1<x<1$ かつ $-1<u<1$

逆に，$x+u<0$ かつ $-1<x<1$ かつ $-1<u<1$ のとき，

$x+u<0$ より $x+u<-x-u$ となり，$1+xu$ を加えると $1+x+u+xu<1-x-u+xu$

ゆえに $(1+x)(1+u)<(1-x)(1-u)$

ここで $-1<x<1$ かつ $-1<u<1$ より，$(1+x)(1+u)$ と $(1-x)(1-u)$ はともに正になるので

$$\sqrt{(1+x)(1+u)}<\sqrt{(1-x)(1-u)}$$

この両辺に $\sqrt{(1+x)(1+u)}\,(>0)$ を掛けると

$(1+x)(1+u)<\sqrt{(1-x)(1+x)(1-u)(1+u)}$ つまり

$$(1+x)(1+u)<\sqrt{(1-x^2)(1-u^2)} \quad \cdots\cdots⑥$$

を得る．

ここで①と②より $\sqrt{(1-x^2)(1-u^2)}=\sqrt{y^2}\sqrt{v^2}=|y||v|=|yv|$ であるが，③より $\sqrt{(1-x^2)(1-u^2)}=-yv$ となるので，⑥は $(1+x)(1+u)<-yv$ となる．展開，移項して 2 倍して，1 を加えると $3+2x+2u+2xu+2yv<1$ となる．

ここで①と②より $3=1+x^2+y^2+u^2+v^2$ であるので

$$1+x^2+y^2+u^2+v^2+2x+2u+2xu+2yv<1$$

つまり $(1+x+u)^2+(y+v)^2<1$ が示された．

以上より，求める条件は $\boldsymbol{x+u<0}$ **かつ** $\boldsymbol{-1<x<1}$ **かつ** $\boldsymbol{-1<u<1}$

第 49 講　期待値

49　1 辺の長さが 1 の立方体の頂点から相異なる 3 点を同時に選ぶこととする.

(1)　選んだ 3 点が正三角形をつくる確率を求めよ.

(2)　選んだ 3 点が直角二等辺三角形をつくる確率を求めよ.

(3)　選んだ 3 点がつくる三角形の面積の期待値を求めよ.

【選択肢】

(1)　㋐ $\frac{1}{14}$　㋑ $\frac{1}{7}$　㋒ $\frac{2}{7}$　㋓ $\frac{3}{7}$

(2)　㋐ $\frac{1}{14}$　㋑ $\frac{1}{7}$　㋒ $\frac{2}{7}$　㋓ $\frac{3}{7}$

(3)　㋐ $\frac{2+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{14}$　㋑ $\frac{1+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{14}$

㋒ $\frac{3+\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{14}$　㋓ $\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{14}$

【答】　(1) ㋑　(2) ㋓　(3) ㋓

【解答】

立方体を ABCD-EFGH とする. 8 点から 3 点を選ぶ選び方は

$${}_8C_3=56 \text{ 通り}$$

である.

(1)　正三角形となるのは △ACF, △ACH, △BDE, △BDG, △FHA, △FHC, △EGB, △EGD の 8 通りなので, 求める確率は

$$\frac{8}{56}=\mathbf{\frac{1}{7}}$$

(2)　頂点 A が直角の直角二等辺三角形となるのは △ABD, △ABE, △ADE の 3 通りであり, 残り 7 頂点に関しても同様なので求める確率は

$$\frac{3\times 8}{56}=\mathbf{\frac{3}{7}}$$

(3)　(1), (2)以外の三角形としては例えば △ADG のような 3 辺の長さが 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ の直角三角形となり, その面積は $\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ である.

また, (1)の三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり, (2)の三角形の面積は $\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$ なので, 求める面積の期待値は

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{7}-\frac{3}{7}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}$$

$$=\mathbf{\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{14}}$$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。